Техническая механика
Конспект лекций

Разработал доцент кафедры «Механика и проектирование машин» УкрДАЗТ Надтока Е.В.

Харьков
2012

Оглавление

Современное производство, определяющееся высокой механизацией и автоматизацией, предлагает использование большого количества разнообразных машин, механизмов, приборов и других устройств**.** Конструирование, изготовление, эксплуатация машин невозможна без знаний в области механики.

Техническая механика – дисциплина, вмещающая в себя основные механические дисциплины: теоретическую механику, сопротивление материалов, теорию машин и механизмов, детали машин и основы конструирования.

Теоретическая механика – это наука, изучающая общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Теоретическая механика принадлежит к фундаментальным дисциплинам и создает основу многих инженерных дисциплин.

В основе теоретической механики лежат законы, которые называются законами классической механики или законами Ньютона, которые установлены путем обобщения результатов большого количества экспериментов и наблюдений. Их справедливость проверена многовековой практической деятельностью человека.

Механическим движением тела называется изменение его положения относительно другого тела, происходящее в пространстве с течением времени.

Механическим взаимодействием называются такие взаимодействия материальных тел, которые изменяют или стараются изменить характер их механического движения или формы (создать деформацию).

Для изучения всего разнообразия механических явлений теоретическая механика обобщена в три раздела, которые рассматриваются в совокупности: статика, кинематика и динамика.

Кинематика рассматривает движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, т.е. без учета сил, вызывающих это движение.

Динамика изучает законы движения материальных тел с учетом действующих на них сил.

СТАТИКА

Основные понятия статики

Статика изучает силу, методы преобразования систем сил в эквивалентные и устанавливает условия равновесия сил, приложенные к твердым телам.

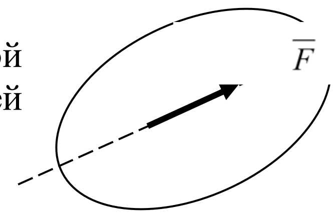
Материальная точка – физическое тело определенной массы, размерами которого можно пренебречь при изучении его движения

Системой материальных точек или **механической системой** называется такая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависят от положения и движения других точек этой системы.

Твердое тело является системой материальных точек.

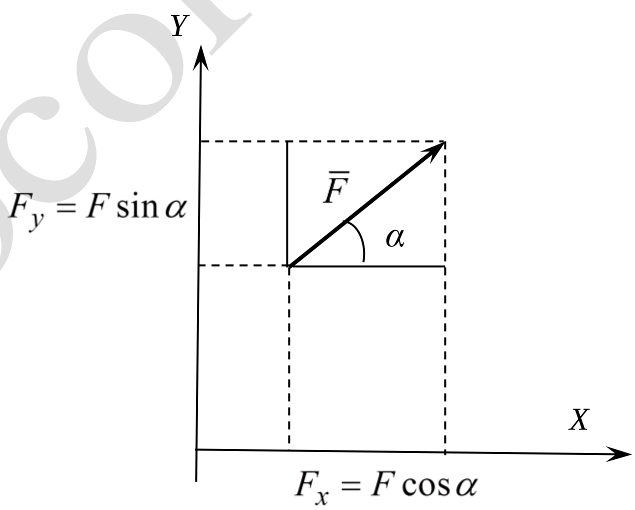
Абсолютно твердое тело – тело, в котором расстояния между двумя произвольными его точками остаются неизменными. Считая тела абсолютно твердыми, не учитывают деформаций, которые возникают в реальных телах.

Сила F – величина, являющаяся мерой механического взаимодействия тел и определяющей интенсивность и направление этого взаимодействия.

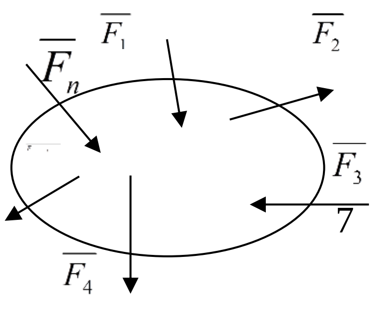


Единицей измерения силы в системе СИ является *ньютон* (1 *Н*).

Как и для любого вектора, для силы можно найти проекции силы на оси координат.



Системой сил называется совокупность сил, действующих на материальное тело или точку $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{Fn}\}$ или $\{\overline{Fn}\}$, где $n = 1, 2, \ldots k$.

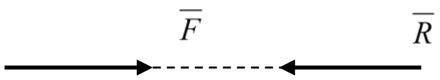


Эквивалентными системами сил называются такие две системы сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{Fn}\}$ и $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots \overline{Pk}\}$, каждую из которых можно заменить другой, не изменяя кинематическое состояние твердого тела:

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{Fn}\} \sim \{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots \overline{Pk}\}$$

Равнодействующей системы сил называется сила $\overline{R}$, которая эквивалентна системе сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{Fn}\}$.

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{Fn}\} \sim \overline{R}.$$



Уравновешивающей силой называется сила $\overline{F}$, равная по модулю равнодействующей, и направленная вдоль линии ее действия в противоположную сторону: $\overline{F} = -\overline{R}$

Уравновешенная система сил – система сил, под действием которой тело находится в равновесии. Уравновешенная система сил эквивалентная нулю.

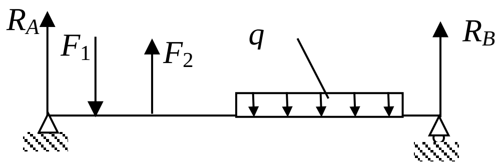
$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{Fn}\} \sim \overline{R} \sim 0$$

Виды сил

нутренними силами называют силы взаимодействия между точками (телами) данной системы

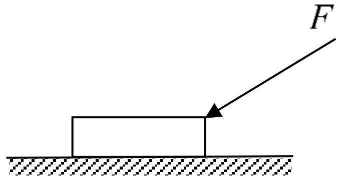
Внешними силами называются силы, действующие на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе. Внешние силы (нагрузка) - это активные силы и реакции связи.

Нагрузки разделяются на:

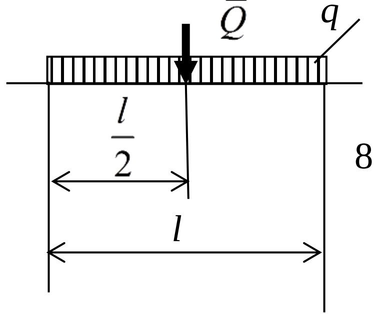


– **объемные** – распределенные по объему тела и приложенные к каждой ее частице (собственный вес конструкции, силы магнитного притягивания, силы инерции).

– **поверхностные** – приложенные к участкам поверхности и характеризующие непосредственное контактное взаимодействие объекта с окружающими телами:



  - сосредоточенные – нагрузки, действующие по площадке, размеры которой малы сравнительно с размерами самого элемента



конструкции (давление обода колеса на рельс) (R_A, R_B, F_1, F_2) [*Н*];

- **распределенные –** нагрузки, действующие по площадке, размеры которой не малы сравнительно с размерами самого элемента конструкции (гусеницы трактора давят на балку моста); интенсивность нагрузки, распределенной вдоль длины элемента, q [*Н/м*].

$$\bar{q} = const\,, \qquad Q = l\,q$$

Аксиомы статики.

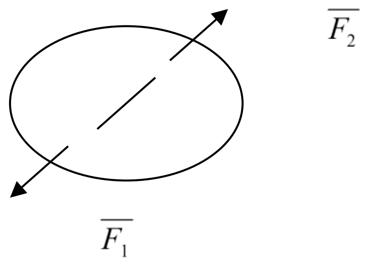
Аксиомы отображают свойства сил, действующих на тело.

1. Аксиома инерции (закон Галилея).

Под действием взаимно уравновешенных сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

2. Аксиома равновесия двух сил.

Две силы, приложенные к твердому телу, будут уравновешенные только в случае, когда они равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположную сторону.



$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2\} \sim 0, \quad \bar{F}_1 = -\bar{F}_2, \quad |F_1| = |F_2|$

Вторая аксиома является условием равновесия тела под действием двух сил.

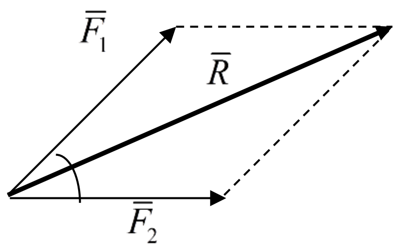
3. Аксиома добавления и отбрасывания уравновешенных сил.

Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или изъять любую уравновешенную систему сил.

Следствие**.** Не изменяя состояние абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль ее линии действия в любую точку, сохраняя неизменными ее модуль и направление. Т.е., сила, приложенная к абсолютно твердому телу, является **скользящим вектором**.

4. Аксиома параллелограмма сил.

Равнодействующая двух сил, которые пересекаются в одной точке, приложена в точке их сечения и определяется диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как сторонах.



$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2},$$
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

5. Аксиома действия и противодействия.

Каждому действию соответствует равное по модулю и противоположное по направлению противодействие.

6. Аксиома равновесия сил, приложенных к деформируемому телу при его затвердевании (принцип затвердевания).

Равновесие сил, приложенных к деформируемому телу (изменяемой системе), сохраняется, если тело считать затвердевшим (идеальным, неизменным).

7. Аксиома освобождения тела от связей.

Не изменяя состояния тела, любое несвободное тело, можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, а их действие заменить реакциями.

Связи и их реакции

Свободным телом называется такое тело, которое может осуществлять произвольные перемещения в пространстве в любом направлении.

Связями называются тела, ограничивающие движение данного тела в пространстве.

Свободным телом называется тело, перемещение которого в пространстве ограниченно другими телами (связями).

Реакцией связи (опоры) называется сила, с которой связь действует на данное тело.

Реакция связи всегда направлена противоположно тому направлению, в котором связь противодействует возможному движению тела.

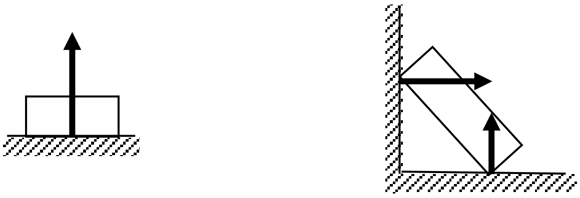
Активная (заданная) сила, это сила, которая характеризует действие других тел на заданное, и вызывает или может вызвать изменение его кинематического состояния.

Реактивная сила – сила, которая характеризует действие связей на данное тело.

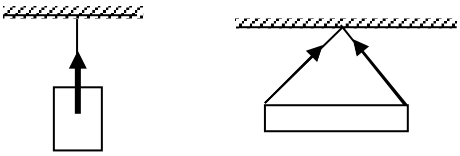
По аксиоме об освобождении тела от связей, любое несвободное тело можно рассматривать как свободное, освободив его от связей и заменив их действие реакциями. В этом заключается **принцип освобождения от связей**.

Основные виды связей.

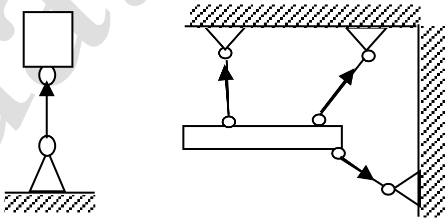
1. *Идеальная (гладкая) поверхность или опора*
(реакция перпендикулярная поверхности, нормальная реакция поверхности).



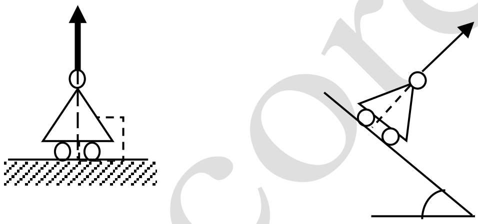
2. *Идеальная нить*
(реакция вдоль нити, троса).



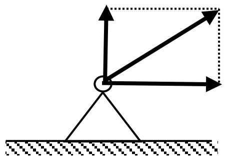
3. *Идеальный стержень*
(реакция вдоль стержня).



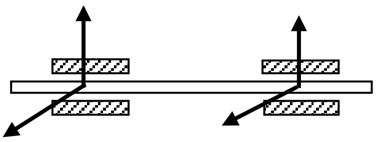
4. *Шарнирно – подвижная опора*.
(опора на катках)
(реакция перпендикулярная поверхности).



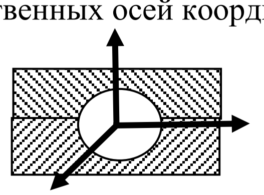
5. *Шарнирно - недвижимая опора*
(реакция состоит из составляющих проекций на координатные оси).



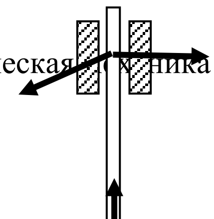
6. *Цилиндрический шарнир или подшипник*.
(реакция из составляющих вдоль осей перпендикулярных оси цилиндра)



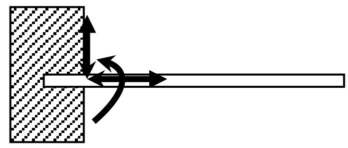
7. *Сферический подшипник*.
(реакция из составляющих вдоль пространственных осей координат).



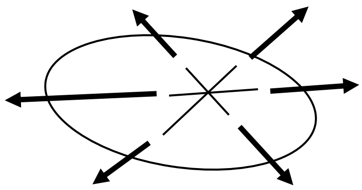
8. *Упорный подшипник*.
(реакция из составляющих вдоль осей)



9. *Недвижимое закрепление*
(жесткая заделка)
(реакции осевые и реактивный момент)



Система сходящихся сил



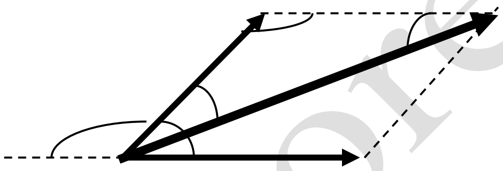
Определение равнодействующей системы сходящихся сил.

Система сходящихся сил − это система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Система сходящихся сил эквивалентная одной силе – **равнодействующей**, которая равняется векторной сумме сил и приложенная в точке сечения линий их действия:

$$\overline{R} = \overline{F_1}, + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_k} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}$$

Методы определения равнодействующей системы сходящихся сил.



1) **Метод параллелограммов сил**. На основании аксиомы параллелограмма сил, каждые две силы данной системы, последовательно, приводятся к одной силе − равнодействующей.

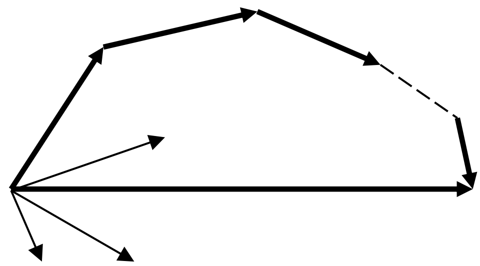
Модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

Направление вектора равнодействующей:

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180-\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

2) Построение векторного силового многоугольника.



Последовательно, параллельным переносом каждого вектора силы в конечную точку предыдущего вектора, составляется многоугольник, сторонами которого являются векторы сил системы, а замыкающей стороной – вектор равнодействующей системы сходящихся сил.

Условия равновесия системы сходящихся сил.

Геометрическое условие равновесия сходящейся системы сил: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы векторный силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнутым.

$$\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F}_n = 0$$

Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси равнялись нулю.

Условие равновесия системы сходящихся сил расположенных в пространстве:

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0,\ \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0,\ \sum_{n=1}^{k} F_{nZ} = 0$$

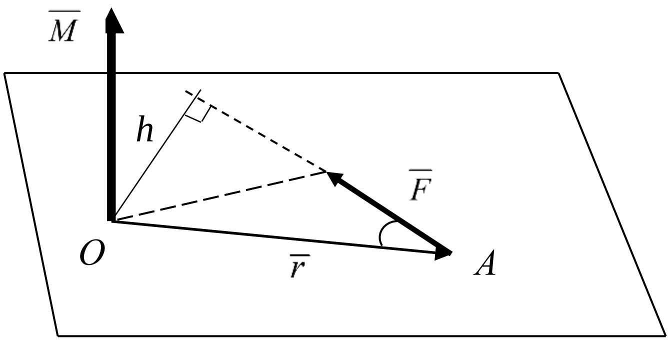
Момент силы относительно центра как вектор.

Какое-либо кинематическое состояние тел, имеющих точку или ось вращения, можно описать **моментом силы**, характеризующим вращательный эффект действия силы.

Момент силы относительно центра - это векторное произведение радиус – вектора $\bar{r}$ точки приложения силы на вектор силы $\overline{F}$.

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F}$$

Сила $\overline{F}$ приложена к точке А, радиус -вектор которой относительно произвольного центра О определяется как $\bar{r} = \overline{OA}$



Модуль момента силы, определяется векторным произведением $\overline{r}$ и $\overline{F}$, и углом α между радиус - вектором и вектором силы:

$$|\overline{M_O}(\overline{F})| = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin(\overline{r}\ \overline{F}) = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \sin(\alpha) = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h$$

Плечо силы *h*– кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы (перпендикуляр из центра на линию действия силы).

Вектор $\overline{M_O}(\overline{F})$ *направляется* по правилу векторного произведения: момент силы относительно центра (точки) как вектор направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены сила и центр так, чтобы с его конца было видно, что сила пытается вращать тело вокруг центра против хода часовой стрелки.

Единицей измерения момента силы есть 1 [*Нм*].

Алгебраическая величина момента силы.

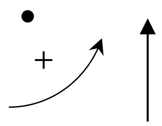
Момент силы относительно центра в плоскости – алгебраическая величина, которая равняется произведению модуля силы $\overline{F}$ на плечо h относительно того же центра с учетом знака.

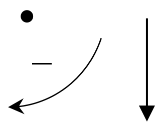
$$M_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h$$

Знак момента силы зависит от направления, в котором сила пытается вращать вокруг центра:

1) против хода часовой стрелки - „+” (положительный);

2) по часовой стрелке - „–” (отрицательный).





Свойства момента силы относительно центра (точки).

1) Модуль момента силы относительно точки равняется удвоенной площади треугольнику построенного на векторах $\overline{r}$ и $\overline{F}$.

$$M_O(\overline{F}) = F \cdot h = AB \cdot h = 2\, S_{\Delta OAB},$$

где $S_{\Delta OAB} = \dfrac{AB \cdot h}{2}$.

2) Момент силы относительно точки не изменяется при перенесении силы вдоль ее линии действия, поскольку неизменным остается плечо силы.

3) Момент силы относительно центра (точки) **равняется нулю** $M_O(\overline{F}) = 0$**,** если:

– сила равняется нулю $F = 0$;

– плечо силы $h = 0$, т.е. линия действия силы проходит через центр.

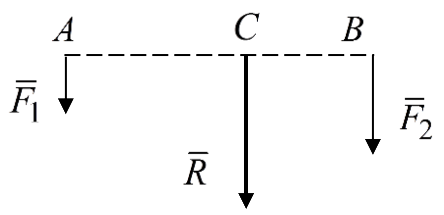
Теорема Вариньона (о моменте равнодействующей).

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно какого-либо центра равняется алгебраической сумме моментов составляющих сил системы относительно того же центра.

$$M_O(\overline{R}) = M_O(\sum_{n=1}^{k}\overline{F_n}) = \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n})$$

Теория пар сил

Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону.



Силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, действуют на абсолютно твердое тело в точках А и В, соответственно.

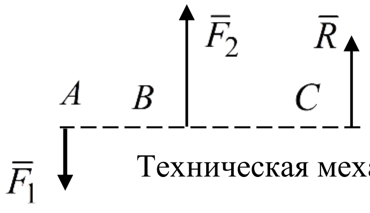
$F_1 \neq F_2$, $\overline{F_1}\,\mathrm{II}\,\overline{F_2}$ и направленны в одну сторону

Равнодействующая системы двух параллельных сил направленных в одну сторону равняется по модулю сумме модулей составляющих сил $R = F_1 + F_2$, параллельна им и направлена в том же направлении.

Линия действия равнодействующей проходит между точками приложения составляющих на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных к силам: $\frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R}$.

Сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны

(случай сил разных по модулю).



Силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, действуют на абсолютно твердое тело в точках А и В, соответственно.

$F_1 \neq F_2$, $\overline{F_1} \parallel \overline{F_2}$ и направлены в противоположные стороны.

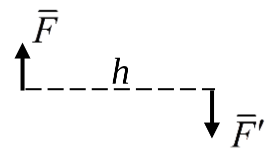
Равнодействующая двух параллельных, неравных по модулю, противоположно направленных сил параллельна им и направлена в направлении большей силы и по модулю равняется разности составляющих сил: $R = F_1 - F_2$

Линия действия равнодействующей проходит за пределами отрезка (со стороны большей силы), соединяющего точки их приложения, и отстоит от них на расстояния, обратно пропорциональные силам.

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}, \qquad \frac{F_2}{F_1} = \frac{AC}{BC}$$

Пары сил

Пара сил – система двух параллельных, равных по модулю и противоположных по направлению сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

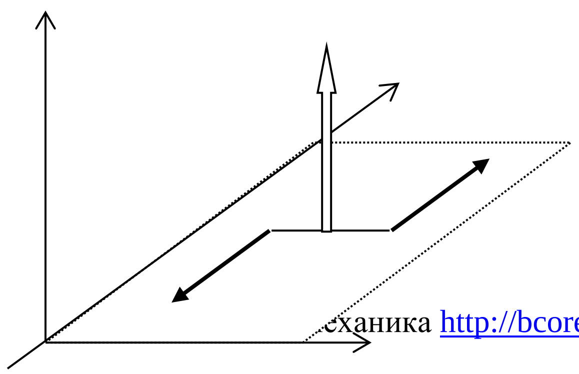


Плечо пары сил h – расстояние между линиями действия сил пары, т.е. длина перпендикуляра, проведенного из произвольной точки линии действия одной из сил пары на линию действия второй силы.

Плоскость действия пары сил – это плоскость, в которой расположены линии действий сил пары.

Действие пары сил сводится к вращательному движению, которое определяется моментом пары.

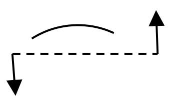
Моментом пары называется вектор с такими признаками:



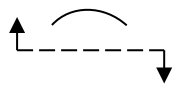
- он перпендикулярен плоскости пары;
- направлен в ту сторону, откуда вращение, которое осуществляет пара, видно против часовой стрелки;
- его модуль равняется произведению модуля одной из сил пары на плечо h пары с учетом знака

$$M = \pm F \cdot h$$

Знак момента пары сил:



„+” – вращение против часовой стрелки



„-„ – вращение по часовой стрелке

Момент пары сил равняется произведению модуля одной из сил пары на плечо пары.

Момент пары – **свободный вектор** – для него ни точка приложения, ни линия действия не обозначены, они могут быть произвольными.

Свойство момента пары сил: момент пары равняется моменту одной из сил относительно точки приложения второй силы.

$$M_B(\overline{F_1}) = M_A(\overline{F_2}) = M(\overline{F_1}\overline{F_2})$$

Теоремы о паре сил

Теорема 1. Пара сил не имеет равнодействующей, т.е. пару сил нельзя заменить одной силой.

Теорема 2. Пара сил не является системой уравновешенных сил.

Следствие: пара сил, действующая на абсолютно твердое тело, старается вращать его.

Теорема 3. Сумма моментов сил пары относительно произвольного центра (точки) в пространстве является величиной неизменной и представляет собой вектор-момент этой пары.

Теорема 4. Сумма моментов сил, которые составляют пару, относительно произвольного центра в плоскости действия пары не зависит от центра и равняется произведению силы на плечо пары с учетом знака, т.е. самому моменту пары.

$$M_O(\overline{F_1}) + M_O(\overline{F_2}) = \pm F_1 \cdot h$$

Теорема 5 - об эквивалентности пар.

Пары сил, моменты которых равны численно и по знаку, являются эквивалентными. Т.е. пару сил можно заменить или уравновесить только другой эквивалентной парой сил.

Теорема 6 - об уравновешенности пары сил.

Пара сил составляет уравновешенную систему сил тогда и только тогда, когда момент пары равняется нулю.

Теорема 7 - о возможностях перемещения пары сил в плоскости ее действия.

Пара сил, полученная перемещениям пары в любое место в плоскости ее действия, эквивалентна предоставленной паре.

Теорема 8 - о добавлении пар сил в плоскости.

Момент пары, эквивалентной предоставленной системе пар в плоскости, равняется алгебраической сумме моментов составляющих пар. Т.е. для сложения пар сил необходимо сложить их моменты.

$$M = \sum_{n=1}^{k} M_n$$

Условия равновесия системы пар сил.

Пары сил в плоскости уравновешиваются в том случае, если алгебраическая сумма их моментов равняется нулю.

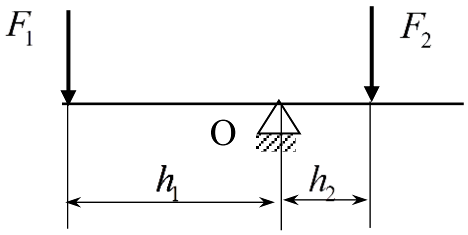
$$\sum_{n=1}^{k} M_n = 0$$

Рычаг

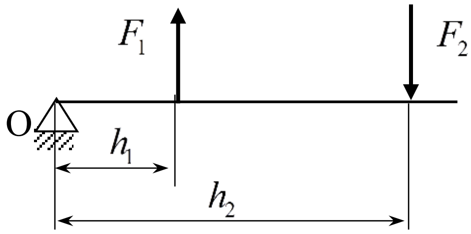
Рычаг – это твердое тело, имеющее недвижимую ось вращения и находящееся под действием сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Если рычаг находится в состоянии покоя, то алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к рычагу относительно опорной точки, равняется нулю:

$$\sum_{n=1}^{k} M_{nO} = 0.$$



Рычаг 1 рода



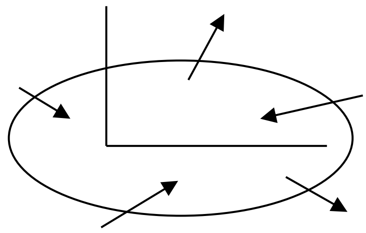
Рычаг 2 рода

$$\sum M_O = F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2$$

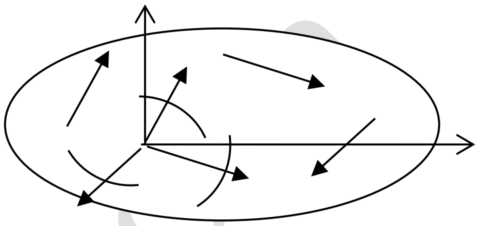
$$F_1 \cdot h_1 = F_2 \cdot h_2$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{F_2}{F_1} = u$$

Произвольная плоская система сил



Произвольная плоская система сил – это система сил, линии действия которых расположены в плоскости независимо.



Методом Пуансо в центре приведения O будет получена система сил и система пар, моменты каждой из которых равняют моментам соответствующей силы относительно центра приведения.

Главным вектором системы $\overline{R}$ называется вектор, который равняется геометрической сумме всех сил системы.

$$\overline{R} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n},$$

Модуль $\overline{R}$:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}, \quad R_X = \sum_{n=1}^{k} F_{nX}, \quad R_Y = \sum_{n=1}^{k} F_{nY}.$$

Направление вектора $\overline{R}$:

$$\cos(\overline{R}, \overline{i}) = \frac{R_X}{R}, \quad \cos(\overline{R}, \overline{j}) = \frac{R_Y}{R}.$$

Главным моментом системы M_O относительно центра O в плоскости называется алгебраическая сумма моментов сил системы относительно центра приведения O.

$$M_O = \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n})$$

Главный вектор $\overline{R}$ не зависит от выбора центра приведения O.

Главный момент сил M_O зависит от центра приведения.

Основная теорема статики о приведении системы сил к данному центру:

Какая-либо плоская произвольная система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно избранному центру O, может быть заменена одной силой $\overline{R}$, равняющейся главному вектору системы и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом M_O, равняющемуся главному моменту системы относительно центра O.

Случаи приведения плоской системы сил к более простому виду.

1. $\overline{R} = 0$ и $M_O = 0$ - система находится в состоянии **равновесия**.

2. $\overline{R} = 0$ и $M_O \neq 0$ – система приводится **к паре** с моментом, который равняется главному моменту системы M_O. Система может вызвать вращательное движение тела, к которому приложена.

3. $\overline{R} \neq 0$ и $M_O = 0$ – система приводится **к равнодействующей** $\overline{R}$, которая проходит через центр О. Под действием такой силы тело, на которое она действует, может двигаться поступательно в направлении вектора силы $\overline{R}$.

4. $\overline{R} \neq 0$, $M_O \neq 0$ – система приводится **к равнодействующей** $\overline{R}$, которая прикладывается в другой точке и не проходит через центр О.

Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

1. Геометрические условия равновесия:

для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю:

$$\overline{R} = 0, \quad M_O = 0$$

Аналитические условия равновесия.

Основная форма условий равновесия

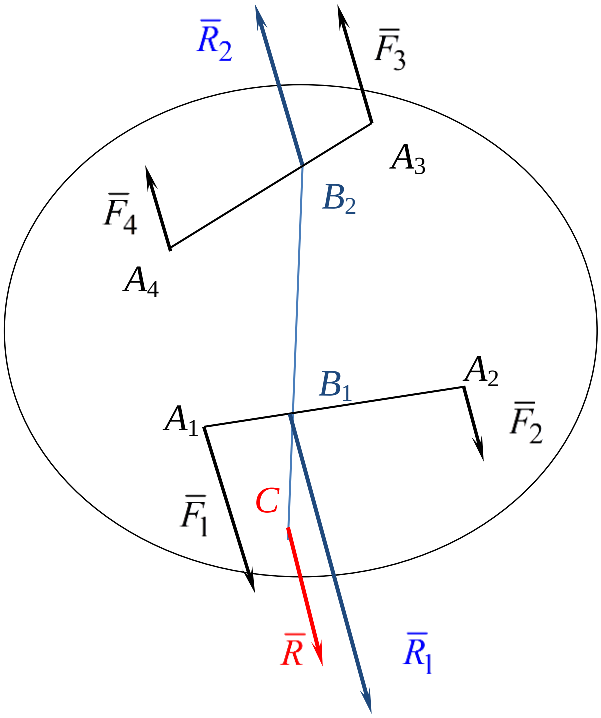
$$\sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}) = 0$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на координатные оси и сумма их моментов относительно любого центра, который лежит в плоскости действия сил, равнялись нулю.

Вторая форма условий равновесия

$$\sum_{n=1}^{k} M_A(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_B(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} F_{nX} = 0$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно любых двух центров А и В и сумма их проекций на ось, не перпендикулярную прямой АВ, равнялись нулю.



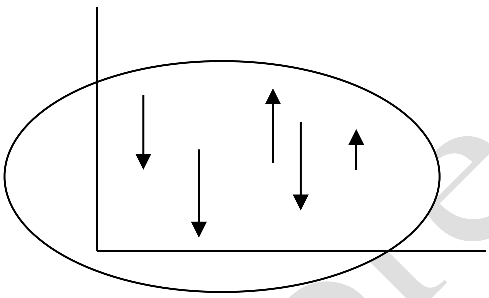
Третья форма условий равновесия (уравнение трех моментов)

$$\sum_{n=1}^{k} M_A(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_B(\overline{F_n}) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{k} M_C(\overline{F_n}) = 0$$

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно любых трех центров А, В и С, не лежащих на одной прямой, равнялись нулю.

Равновесие плоской системы параллельных сил.



1 форма:

$$\sum_{n=1}^{k} F_{nY} = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_O(\overline{F_n}) = 0$$

2 форма:

$$\sum_{n=1}^{k} M_A(\overline{F_n}) = 0, \quad \sum_{n=1}^{k} M_B(\overline{F_n}) = 0$$ (точки А и В не должны принадлежать прямой, параллельной силам).

Центр параллельных сил. Центр тяжести.

Центр параллельных сил

К телу в точках A_1, A_2, A_3, A_4, приложены параллельные силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ и $\overline{F}_4$. Складывая силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ по правилу сложения двух параллельных сил, направленных в одну сторону, получим равнодействующую $\bar{R}_1$.

$$R_1 = F_1 + F_2$$

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

Также складывая силы $\bar{F}_3$ и $\bar{F}_4$, получаем их равнодействующую $\bar{R}_2$.

В результате сложения получены две параллельные противоположно направленные силы $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$, приложенные в точках B_1 и B_2.

В зависимости от модулей и точек приложения этих сил возможные случаи:

1. Силы $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ не равны по модулю. Если $R_1 > R_2$, то $R = R_1 - R_2$, и направлена в сторону большей силы.

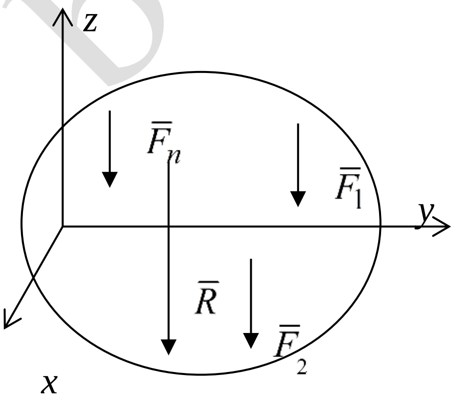
Точка C – центр параллельных сил, находится на продолжении отрезка B_1B_2 за точкой приложения большей силы

$$\frac{B_1C}{B_2C} = \frac{R_2}{R_1}.$$

2. Силы $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ равны по модулю, но линии их действий не совпадают. В этом случае система сил приводится к паре сил.

3. Силы $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ равны по модулю и линии их действий совпадают. В этом случае система сил уравновешена.

Система параллельных сил, направленных в одну сторону, не может быть уравновешена или приводиться к паре сил, она всегда имеет равнодействующую.



Равнодействующая $\bar{R}$ системы параллельных сил $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots \bar{F}_n\}$ равна $\bar{R} = \sum_{n=1}^{k} \bar{F}_n$

Линия действия равнодействующей $\bar{R}$ параллельна силам. Положение точки ее приложение зависит от величин и положения точек $A_1, A_2, \ldots A_n$ приложения сил системы.

Центр параллельных сил – точка С точка приложения равнодействующей $\bar{R}$

системы параллельных сил.

Положение центра параллельных сил – точки C, определяется **координатами этой точки C (** x_C, y_C, z_C **)**:

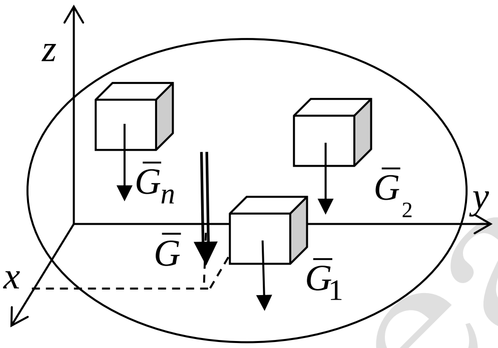
$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(F_n \cdot x_n)}{\sum_{n=1}^{k} F_n}; \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(F_n \cdot y_n)}{\sum_{n=1}^{k} F_n}; \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(F_n \cdot z_n)}{\sum_{n=1}^{k} F_n}$$

где $\sum_{n=1}^{k} F_n = R$.

Центр тяжести твердого тела и его координаты.

Вес тела это равнодействующая сил тяжести отдельных частиц тела, которое равняется их сумме:

$$\overline{G} = \sum_{n=1}^{k} \overline{\Delta G_n}$$



Каждая отдельная из n - частиц тела находится под действием собственных сил тяжести $\overline{\Delta G_n}$, представляющих систему параллельных, однонаправленных сил $\overline{\Delta G_1}, \overline{\Delta G_2}, ... \overline{\Delta G_n}$, , приложенных в точках A_1, A_2,.., A_n, соответственно.

Центр тяжести тела - неизменно связанная с этим телом геометрическая точка, в которой приложена равнодействующая сил тяжести отдельных частиц тела, т.е. вес тела в пространстве.

Координаты центра тяжести определяются аналогично координатам центра параллельных сил C **(** x_C, y_C, z_C **)**, составленных силами тяжести частиц тела $\overline{\Delta G_1}, \overline{\Delta G_2}, ... \overline{\Delta G_n}$:

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta G_n \cdot x_n)}{G}; \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta G_n \cdot y_n)}{G}; \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta G_n \cdot z_n)}{G}$$

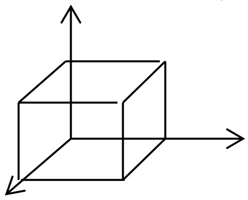
где $G = \sum_{n=1}^{k} \Delta G_n$ - вес тела,

x_n, y_n, z_n - соответствующие координаты точек приложения A_1, A_2,.., A_n сил тяжести частиц тела.

Центр тяжести объема, плоскости и линии.

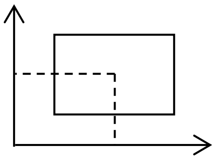
Положение центра тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы и размеров, и не зависит от свойств материала, из которого тело выполнено.

1. Центр тяжести объема ($G \sim V$ **).**



$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta V_n \cdot x_n)}{V}; \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta V_n \cdot y_n)}{V}; \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta V_n \cdot z_n)}{V}$$

2. Центр тяжести плоской фигуры ($G \sim A$ **).**



$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta A_n \cdot x_n)}{A}; \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta A_n \cdot y_n)}{A},$$

Сумма произведений элементарных площадей, входящих в состав плоской фигуры, на алгебраические значения их расстояний до некоторой оси, называется **статическим моментом площади плоской фигуры**.

$$S_x = \sum_{n=1}^{k}(\Delta A_n \cdot y_n) = Ax_c$$

$$S_y = \sum_{n=1}^{k}(\Delta A_n \cdot x_n) = Ay_c$$

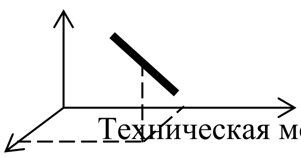
Статический момент площади плоской фигуры равняется произведению площади фигуры на алгебраическое расстояние от центра тяжести до этой оси. Единица измерения статического момента [см^3].

Координаты центра тяжести через статические моменты площади плоской фигуры

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}.$$

<u>Вывод</u>: статический момент площади плоской фигуры относительно оси, которая проходит через центр тяжести фигуры, равняется нулю.

3. Центр тяжести линии ($G \sim L$ **).**



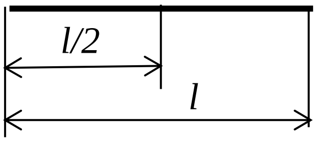
$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta L_n \cdot x_n)}{L}; \quad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta L_n \cdot y_n)}{L}; \quad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta L_n \cdot z_n)}{L} \qquad (1.51)$$

Способы определения положения центра тяжести.

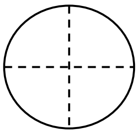
Аналитические методы.

1. Метод симметрии.

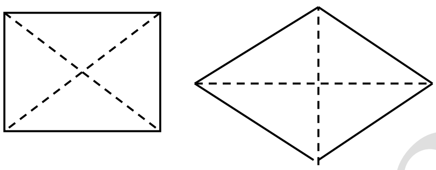
Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.



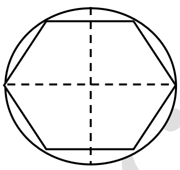
Центр тяжести линии длиной l - по середине.



Центр тяжести окружности (или круга) радиуса R - в его центре, т.е. в точке пересечения диаметров.



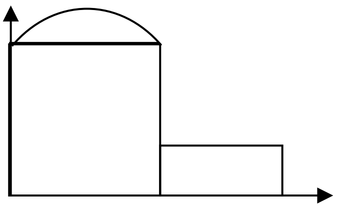
Центр тяжести параллелограмма, ромба или параллелепипеда – в точке пересечения диагоналей.



Центр тяжести правильного многоугольника - в центре вписанного или описанный круга.

2. Метод разбивки.

Если тело можно разбить на конечное количество элементов (объемов, плоскостей, линий), для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно определить зная значения для элементов непосредственно по формулам

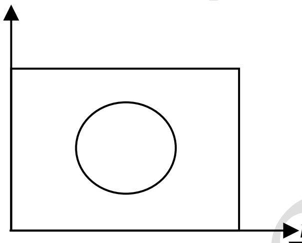


$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta S_n \cdot x_n)}{S} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S}, \qquad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta S_n \cdot y_n)}{S} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S}$$

3. Метод дополнения (отрицательных плоскостей).

Если тело имеет вырезанные элементы, то при разбивке на элементы, вырезанная часть (площадь, объем) отнимаются из общей, т.е. вырезанным элементам даются отрицательные значения площади или объема



$$S = S_1 - S_2$$

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta S_n \cdot x_n)}{S} = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S}$$

$$y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k}(\Delta S_n \cdot y_n)}{S} = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S}$$

ОСНОВЫ РАЧСЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ

Задачи и методы сопротивления материалов

Основными задачами в технике являются обеспечения прочности, жесткости, устойчивости инженерных конструкций, деталей машин и приборов.

Наука, в которой изучаются принципы и методы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость называется **сопротивлением материалов**.

Прочность – это способность конструкции в определенных пределах воспринимать действие внешних нагрузок без разрушения.

Жесткость – это способность конструкции в определенных пределах воспринимать действие внешних нагрузок без изменения геометрических размеров (не деформируясь).

Устойчивость – свойство системы самостоятельно восстанавливать первоначальное состояние после того, как ей было дано некоторое отклонение от состояния равновесия.

Каждый инженерных расчет состоит из трех этапов:

1. Идеализация объекта (выделяются наиболее существенные особенности реальной конструкции - создается расчетная схема).
2. Анализ расчетной схемы.
3. Обратный переход от расчетной схемы к реальной конструкции и формулирование выводов.

Сопротивление материалов базируется на законах теоретической механики (статика), методах математического анализа, материаловедении.

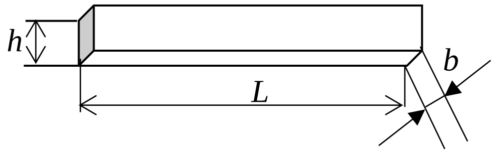
Классификация нагрузок

Различают внешние и внутренние силы и моменты. **Внешние силы** (нагрузки) – это активные силы и реакции связи.

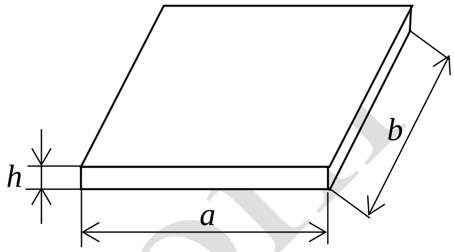
По характеру действия нагрузки делятся на:

– **статические** – прикладывается медленно, возрастая от нуля до конечного значения, и не изменяются;
– **динамические** – изменяют величину или направление за короткий промежуток времени:
  - *внезапные* - действуют сразу на полную силу (колесо локомотива, заезжающего на мост)**,**
  - *ударные* – действуют на протяжении короткого времени (дизель-молот),
  - *циклические* (нагрузка на зубья зубчатого колеса).

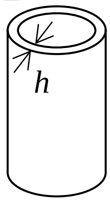
Классификация элементов конструкций



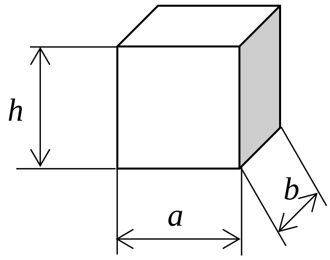
Стержень (брус) – тело, длина которого L превышает его поперечные размеры b и h. *Ось стержня* – линия, соединяющая центры тяжести последовательно расположенных сечений. *Сечение* – это плоскость перпендикулярная оси стрежня.



Пластина – тело плоской формы, у которого длина a и ширина b больше по сравнению с толщиной h.



Оболочка – тело, ограниченное двумя близко расположенными криволинейными поверхностями. Толщина оболочки мала по сравнению с другими габаритными размерами, радиусами кривизны ее поверхности.



Массивное тело (массив) – тело, у которого все размеры одного порядка.

Деформации стержня

При нагрузке тел внешними силами они могут изменять свою форму и размеры. Изменение формы и размеров тела под действием внешних сил называется **деформацией**.

Деформации бывают:

– упругие - исчезают после прекращения действия вызвавших их сил;
– пластические - не исчезают после прекращения действия вызвавших их сил.

В зависимости от характера внешних нагрузок различают такие виды деформаций:

– **растяжение-сжатие** – состояние сопротивления, которое характеризуется удлинением или укорочением,

- **сдвиг** – смещение двух сопредельных поверхностей относительно друг друга при неизменном расстоянии между ними,
- **кручение** – взаимный поворот поперечных сечений относительно друг друга,
- **изгиб** – состоит в искривлении оси.

Бывают более сложные деформации, которые образуются сочетанием нескольких основных.

Линейные деформации связаны с перемещением точек или сечений вдоль прямой линии (растяжение, сжатие).

Угловые деформации связаны с относительным поворотом одного сечения относительно другого (кручение).

Основные гипотезы и принципы

1. **Гипотеза о сплошности материала**: тело, сплошное и непрерывное до деформации, остается таким же и в процессе деформации.
2. **Гипотеза об однородности и изотропности**: в любой точке тела и в любом направлении физико-механические свойства материала считаются одинаковыми.
3. **Гипотеза о малости деформаций**: в сравнении с размерами тела деформации настолько малы, что не изменяют положения внешних сил, действующих на тело.
4. **Гипотеза об идеальной упругости**: в заданных малых перделах деформирования все тела идеально упругие, т.е. деформации полностью исчезают после прекращения нагрузок.
5. **Гипотеза плоских сечений**: сечение плоское до деформирования остается плоским и после деформации.

Закон Гука и гипотеза о малости деформаций дают возможность применять **принцип суперпозиции** (принцип независимости или сложения сил): деформации тела, вызванные действиями нескольких сил, равняются сумме деформаций, вызванных каждой силой.

Прицип Сен-Венана: статически эквиваленте системы сил, действующие на малую, сравнительно с общими размерами тела, его часть, при достаточном отдалении от этой части вызывают одинаковые деформации тела.

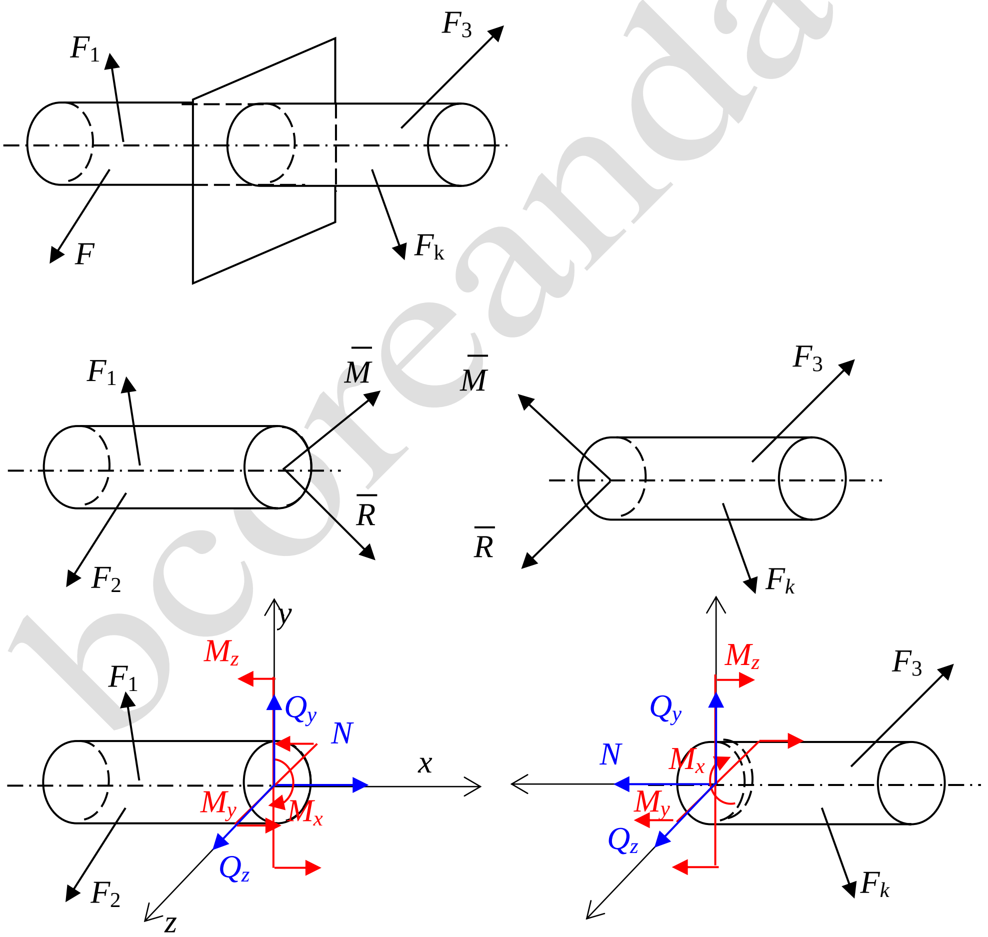
Принцип затвердения: тело, испытывающее деформирование, затвердело и к нему можно применять уравнения статики.

Внутренние силы. Метод сечений.

Внутренние силы – это силы механического взаимодействия между частичками материала, возникающие в процессе деформирования как реакции материала на внешнюю нагрузку.

Для нахождения и определения внутренних сил применяют **метод сечений (РОЗУ)**, который сводится к следующим операциям:

- условно перерезаем тело на две части секущей плоскостью (Р - разрезаем);
- отбрасываем одну из частей (О - отбрасываем);
- заменяем влияние отброшенной части на оставленную внутренними силами (усилиями) (З - заменяем) ;
- из условий равновесия системы сил, действующих на оставленную часть, определяем внутренние силы (В – уравнения равновесия);



В результате сечения стержня поперечным сечением, разорванные связи между частями заменяются внутренними силами, которые можно свести к главному вектору R и главному моменту M внутренних сил. При проектировании их на координатные оси получаем:

N – продольная (осевая) сила,
Q_y – поперечная (перерезывающая) сила
Q_z – поперечная (перерезывающая) сила
M_x – крутящий момент
M_y – изгибающий момент
M_z – изгибающий момент

Если известны внешние силы, все шесть компонент внутренних сил могут быть найдены из уравнений равновесия:

$$N + \sum X = 0$$
$$Q_y + \sum Y = 0$$
$$Q_z + \sum Z = 0$$
$$M_x + \sum M_x^з = 0$$
$$M_y + \sum M_y^з = 0$$
$$M_z + \sum M_z^з = 0$$

Напряжения

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади сечения dA. Вследствие малости элемента, можно считать, что внутренние усилия, действующие в его различных точках, одинаковы по модулю и по направлению. Тогда их равнодействующая dF проходит через центр тяжести элемента.

Нормальное напряжение:

$$\sigma = \frac{dN}{dA},$$

где dN – элементарная продольная силы (проекция dF на ось x).

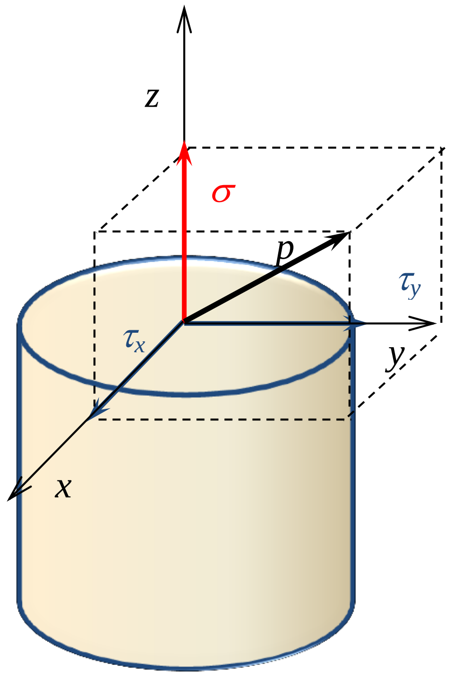
Касательные напряжения:

$$\tau_y = \frac{dQ_y}{dA} \qquad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA},$$

где dQ_y, dQ_y, – элементарные поперечные силы (проекции dF на оси y, z).

Полное напряжение:

$$p = \frac{dP}{dF} = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}.$$



Определение зависимости между внешними силами, с одной стороны, и напряжением и деформацией, с другой, - основная задача сопротивлению материалов.

Растяжение и сжатие

Растяжение или сжатие часто встречаются в элементах машин или сооружений (растяжение троса крана при подъеме груза; шатун двигателя, штоки цилиндров в подъёмно-транспортных машинах).

Растяжение или сжатие – это случай нагружения стрежня, который характеризуется его удлинением или укорочением. Растяжение или сжатие вызывается силами F, действующими вдоль оси стрежня.

При растяжении стержень удлиняется, а его поперечные размеры уменьшаются. Изменение ΔL начальной длины L стрежня называют **абсолютным удлинением** при растяжении или **абсолютным укорочением** при сжатии. Отношение абсолютного удлинения (укорочение) к начальной длине стрежня называется **относительным удлинением**:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}.$$

В этом случае:

- ось стержня остается прямой линией,
- поперечные сечения стержня уменьшаются вдоль его оси параллельно самим себе (потому что поперечное сечение - это плоскость перпендикулярная оси стрежня, а ось - прямая линия);
- поперечные сечения остаются плоскими.

Все волокна стрежня удлиняются на одну и ту же величину ΔL и их относительные удлинения одинаковые:

$$\varepsilon = const .$$

Разность соответствующих поперечных размеров после деформации и до нее называется **поперечной деформацией**.

$$\Delta h = h_1 - h$$

$$\Delta b = b_1 - b$$

Отношение абсолютной поперечной деформации к соответствующему начальному размеру называется **относительной поперечной деформацией**:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta b}{b}.$$

Между поперечной и продольной деформациями существует соотношение. **Коэффициент Пуассона**:

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|.$$

Коэффициент Пуассона − безразмерная величина, находящаяся в пределах 0...0,5 (для стали $\nu \approx 0{,}3$).

В поперечных сечениях возникают нормальные напряжения σ. Зависимость напряжений от деформаций устанавливает **закон Гука**:

$$\sigma = E\varepsilon ,$$

где *E* – модуль продольной упругости, модуль упругости первого рода, модуль Юнга, характеризующий упругие свойства материала (для стали $E \approx 2\cdot10^5$ МПа).

В сечении стержня возникает один внутренний силовой фактор – **продольная сила *N***. Продольная сила *N* является равнодействующей нормальных напряжений σ, которая численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на одну из частей рассеченного стрежня и направленных вдоль его оси.

Нормальные напряжения :

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Учитывая, что $\sigma = E\varepsilon$ и $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L}$:

$$E\cdot\frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{A}$$

$$\Delta L = \frac{NL}{EA}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}.$$

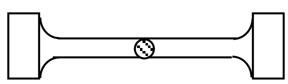
Произведение *EA* называется **жесткостью поперечного сечения стержня** при растяжении или сжатии, и имеет размерность силы.

Механические характеристики материала

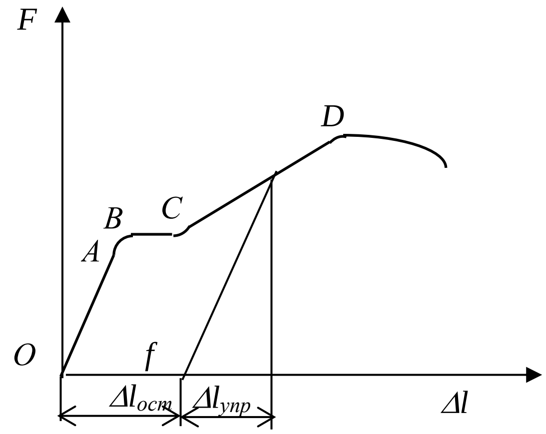
К механическим характеристикам относятся:

- модуль упругости *E*,
- коэффициент Пуассона *ν*,
- пластичность,
- твердость,
- прочность и др.

Для определения этих характеристик используют испытания. Наиболее распространенные испытания на растяжение. Для испытаний используют специальные образцы.



Основной целью испытаний является построение диаграммы растяжения-сжатия, т.е. зависимости между силой, действующей на образец, и его удлинением.

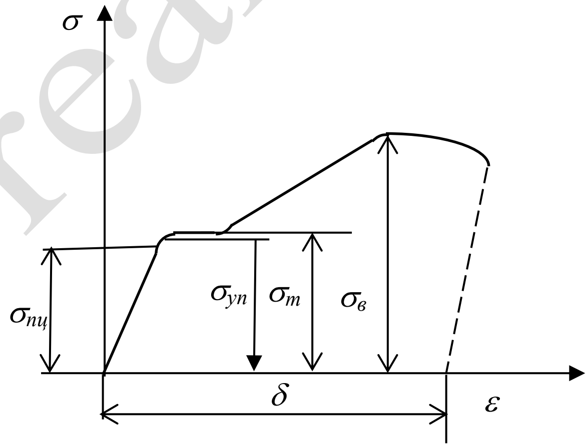


Особенности диаграммы растяжения малоуглеродистой стали.

OA – **упругая стадия**, при сравнительно малых нагрузках материал подвержен закону Гуку и после прекращения нагрузки никаких остаточных деформации нет.

BC – **площадка текучести,** в дальнейшем рост нагрузки замедляется и вскоре совсем прекращается. Явление роста деформаций при постоянной нагрузке имеет название **текучести**.

CD – **упрочнение**, после окончания стадии текучести образец снова начинает сопротивляться деформациям. Если повторно нагрузить образец исчезает участок текучести ($f > OA$), образец приобретает способность воспринимать без остаточных деформаций большие нагрузки. Явление увеличения упругих свойств в результате предварительного пластического деформирования имеет название **наклеп**.



В точке *D* наблюдается качественное изменение характера деформаций (образуется прогрессирующая шейка). Разрушение может быть доведено до конца даже при уменьшении нагрузки.

Точка *E* – разрушение образца.

Во избежание влияния размеров строят диаграмму $\sigma = f(\varepsilon)$.

$\sigma_{пц}$ – **предел пропорциональности** – наибольшие напряжения, до которых справедлив закон Гука (для стали 200 *МПа*).

$\sigma_{упр}$ – **предел упругости** – наибольшие напряжения, до которых материал не имеет остаточных деформаций (для стали 200 *МПа*).

σ_T – **предел текучести** – напряжение, при которых происходит рост деформаций без увеличения нагрузки (для стали 240 *МПа*).

$\sigma_в$ – **предел прочности** – напряжение, которые может выдержать образец без разрушения (для стали 400 *МПа*).

Также определяются:

– относительное окончательное удлинение после разрушения:

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100\%$$

– относительное окончательное сужение сечения образца в месте разрушения:

$$\varphi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100\%$$

В зависимости от δ материалы делятся на:

– пластичные (> 5% (углеродная сталь, медь, алюминий),
– хрупкие (< 5% (чугун, бетон, инструментальная сталь).

Диаграмма растяжения хрупких материалов не имеет площадки текучести. Для них проводят испытание на сжатие, так как они лучше оказывают сопротивление сжатию, чем растяжения (Для пластичных материалов модуль упругости, предел упругости, предел текучести при растяжении и сжатии приблизительно одинаковы).

Кроме хрупких и пластичных материалов существуют еще упруго-вязкие материалы (полиамиды). Для них характерно явление ползучести и релаксации напряжений.

Ползучесть – это непрерывный рост пластических деформаций при неизменной нагрузке.

Релаксация напряжений – медленное уменьшение напряжений при неизменной полной деформации за счет увеличения пластической составляющей и уменьшения упругости.

Допускаемые напряжения

Для пластичных материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$$

Для хрупких материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n},$$

где n -коэффициент запаса прочности.

Условие прочности при растяжении:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Для стали 3 $[\sigma]=160$ МПа.

Твердость материалов

Для определения твердости существует три метода:

1. Метод Бринеля - твердость определяется как

$$HB=\frac{F}{A},$$

где F – сила, с которой вдавливается заготовленный шарик в материал,

A - площадь отпечатка.

2. Метод Роквела – используется алмазный конус и заготовленный шарик, твердость определяется по разности на шкале прибора от действия предыдущей нагрузки до полной нагрузке (HR_C – конус, HR_B – кулька)

3. Метод Виленса - для определения твердости используется алмазная пирамида и определяется

$$HV=\frac{F}{A}.$$

Эпюры продольных сил и напряжений.

Графики, показывающие, как изменяются внутренние усилия при переходе от сечения к сечению, называется **эпюрами**.

Правила построения эпюр:

1. Ось, на которой строится эпюра (база), параллельна оси стержня.
2. Ордината эпюры откладывается от оси эпюры по перпендикуляру.
3. Штрихуют эпюры линиями, которые перпендикулярны к базы.
4. Для усилий выбирают определенный масштаб, проставляют значение характерных ординат, в поле эпюры ставят знак усилия.

Пример: Для стального стержня выявить закон изменения продольных сил, напряжений и перемещений, если $E=2\cdot10^5 МПа$. Договоримся считать продольную силу положительной, если она вызывает растяжение.

1. Стержень имеет два участка разной жесткости. Из условия равновесия любой рассеченной части стержня на первом участке:

$$0\le x_1\le l_1$$

$$0\le x_1\le 2\text{ м}$$

$$N_1=-F_1=-2кН,$$

на втором участке:

$$0\le x_1\le l_2$$

$$0\le x_1\le 1\text{м}$$

$$N_2=-F_1+F_5=-2+7=5кН.$$

В выбранном масштабе строим эпюру продольных сил.

2. Определяем напряжение в перерезах

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-2\cdot 10^3}{0,0002} = -10\ МПа$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{5\cdot 10^3}{0,0001} = 50\ МПа$$

В выбранном масштабе строим эпюру напряжений.

3. Определим, на какую величину перемещается каждое сечение стрежня

$$u(x_n) = u(x_{n-1}) + \frac{N_n\cdot x_n}{E\cdot A_n}$$

на первом участке:

$$0 \le x_1 \le l_1$$

$$0 \le x_1 \le 2\,\text{м}$$

$$u(x_1) = u(x_0) + \frac{N_1\cdot x_1}{E\cdot A_1}$$

$$u(x_1)_{|x_1=1} = 0 - \frac{2000\cdot x_1}{2\cdot 10^5\cdot 0,0002}$$

$$u(x_1)_{|x=1} = 0 - \frac{2000\cdot 2}{2\cdot 10^{11}\cdot 0,0002} = -0,0001\text{м}$$

на втором участке:

$$0 \le x_2 \le l_2$$

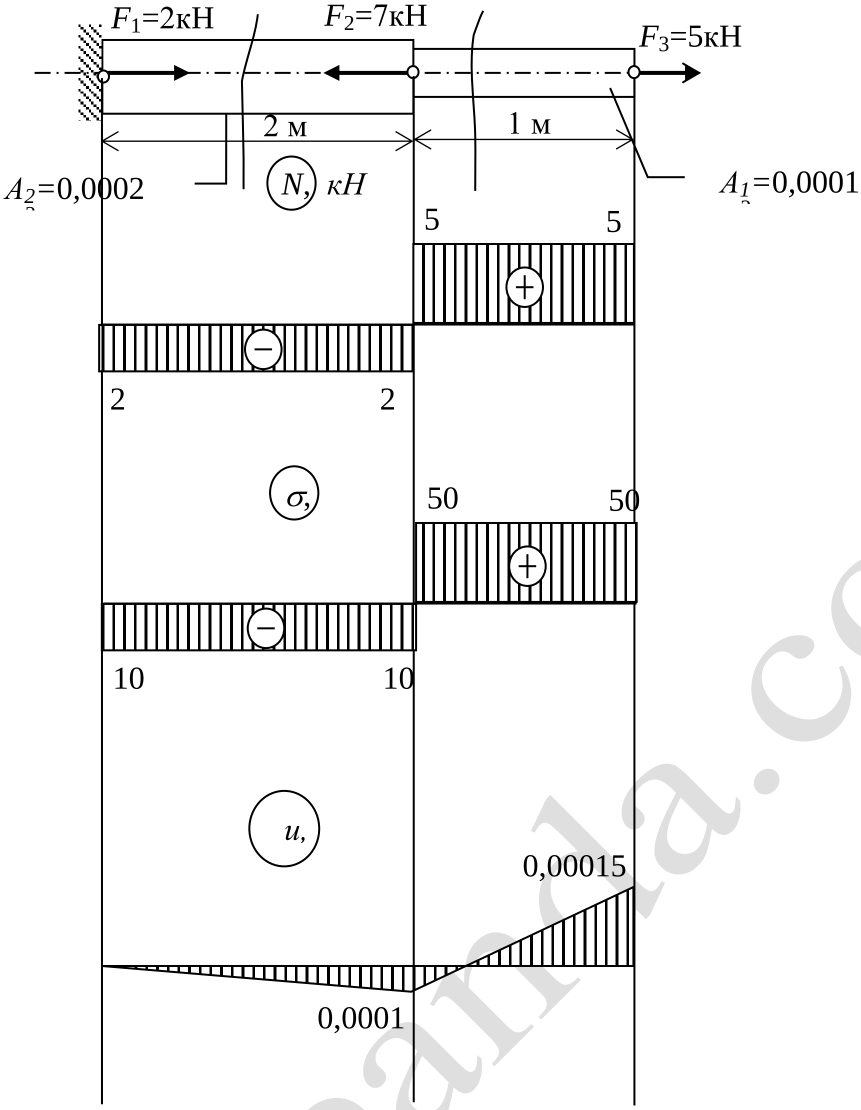
$$0 \le x_2 \le 1\text{г}$$

$$u(x_2) = u(x_1) + \frac{N_2\cdot x_2}{E\cdot A_2}$$

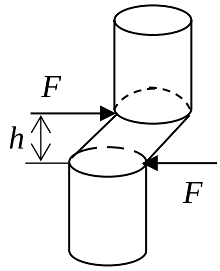
$$u(x_2)_{|x_2=0} = -0,0001 + 0 = 0,0001\text{м}$$

$$u(x_1)_{|x_2=2} = -0,0001 + \frac{5000\cdot 1}{2\cdot 10^{11}\cdot 0,0001} = 0,00025 - 0,0001 = 0,00015\text{м.}$$

Строим эпюру перемещений.



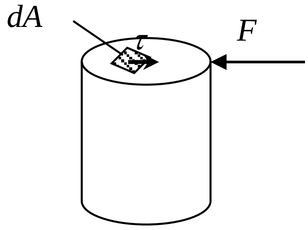
Сдвиг



Сдвиг – такой вид деформации, при котором одно сечение стержня смещается относительно другого, а расстояние между ними не изменяется.

Сдвиг может быть вызван действием двух равных, параллельных и противоположно направленных сил, расположенных на близком расстоянии друг от друга перпендикулярно к оси стрежня.

Детали, служащие для соединения элементов металлоконструкций, механизмов и машин (заклепки, болты, булавки, сварные швы и т.п.), воспринимают нагрузки, перпендикулярные их продольной оси, т.е. испытывают сдвиг.



Во внутреннем сечении при сдвиге возникает один силовой фактор – перерезывающая сила Q. Касательные напряжения τ лежат в плоскости сечения. В случае недостаточной прочности происходит перерезывание деталей. Говорят, что детали работают на срез, и касательные напряжения называют напряжениями среза.

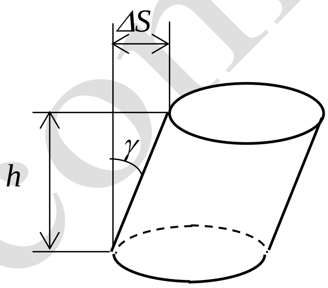
$$\tau = \frac{Q}{A}$$

Условие прочности при сдвиге:

$$\tau = \frac{Q_{\max}}{A} \le [\tau],$$

где $[\tau]$ – допускаемые касательные напряжения $[\tau] = 0{,}6\,[\sigma]$.

При сдвиге одна плоскость смещается относительно другой. Степень смещения характеризуется абсолютным сдвигом ΔS, зависящим от расстояния h между сечениями. Во избежание влияния h, вводят понятие относительного сдвига:



$$tg\gamma = \frac{\Delta S}{h} = \gamma\,.$$

Относительный сдвиг равняется угловому перемещению продольного волокна элемента – углу сдвига.

Между углом сдвига и касательным напряжения существует прямая пропорциональность – **закон Гука** при сдвиге:

$$\tau = G\gamma\,,$$

где G – упругая постоянная материала, модуль сдвига (модуль Юнга второго рода, для стали $G = 0{,}8 \cdot 10^5\,МПа$).

Величина абсолютного сдвига:

$$\Delta S = \frac{Qh}{GA},$$

где GA – жесткость при сдвиге.

Между модулем продольной упругости E и модулем сдвига G имеется зависимость :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\,.$$

Для стали ν = 0,25, G = 0,4E, т.е. сопротивление сдвигу слабее, чем сопротивление растяжению.

Геометрические характеристики сечений

1. **Площадь поперечного сечения** (при растяжении, сжатии).

$$A = \int_A dA.$$

2. **Статические моменты сечения** относительно осей X и Y ([м^3]):

$$S_x = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A x dA$$

Если оси координат проходят через центр тяжести сечения, то статические моменты равны нулю. Оси называются **центральными**.

3. **Координаты центра тяжести**:

$$x_c = \frac{\int_A x dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{S_x}{A}$$

4. **Моменты инерции** [м^4]:

осевые:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

центробежный

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

полярный

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

$$I_\rho = I_x + I_y$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равняется нулю, называются **главными осями инерции**. Осевые моменты инерции относительно главных осей координат принимают экстремальные значения:

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

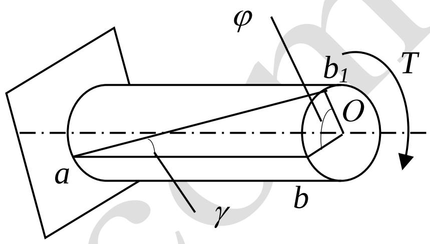
$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Кручение

Кручение имеет место при нагрузке вала внешними силами, плоскости действия которых перпендикулярны его продольной оси (вал со шкивами, зубчатыми колесами и т.п.).

Моменты этих сил - вращающие моменты.

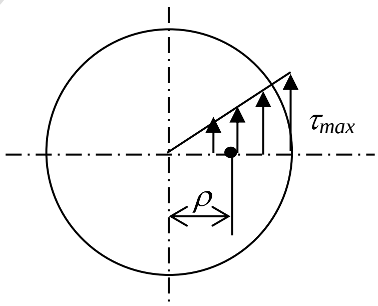
При кручении в поперечном сечении возникает внутренний силовой фактор – крутящий момент *T*. На основании метода сечений, крутящий момент в сечении равняется алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих с одного стороны рассматриваемого сечения.



При приложении крутящего момента *T* к концу жестко закрепленного вала образующая *ab* повернется на угол γ и займет положение ab_1. γ – **угол сдвига при кручении**.

Поперечные сечения поворачиваются относительно друг друга на некоторый угол – **угол закручивания** φ.

При кручении в поперечных сечениях возникают касательные напряжения:



$$\tau = \frac{T}{I_\rho}\rho,$$

где I_ρ – момент инерции сечения.

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_\rho} \le [\tau],$$

где $W_\rho = \dfrac{I_\rho}{\rho_{\max}}$ – полярный момент сопротивления.

$$[\tau] \approx (0,5 \div 0,6)\sigma_T \, МПа.$$

Для круглого сечения $W_\rho = \dfrac{\pi d^4}{32}$, $\rho_{\max} = \dfrac{d}{2}$ диаметр определяется по формуле:

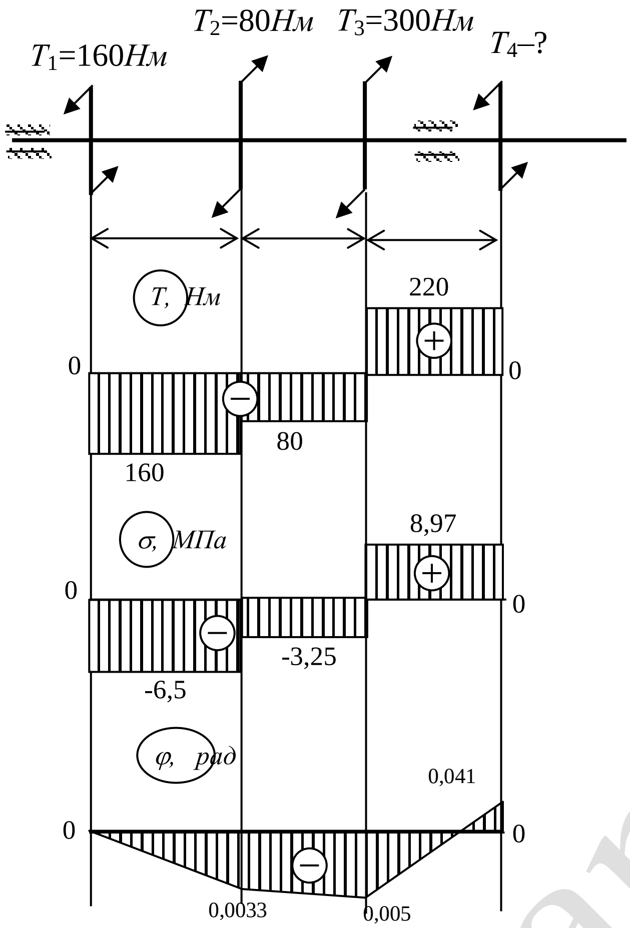
$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16 T_{\max}}{\pi[\tau]}}.$$

При кручении расстояние между поперечными сечениями не изменяется. Угол закручивания φ равняется.

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_\rho},$$

где l – расстояние между двумя сечениями.

Пример. Проверить на прочность вал, если диаметр вала d = 0,05*м*, [τ]=20*МПа*, G =0.8·10^5*МПа*.



1. Определяем T_4

$$T_1 - T_2 - T_3 + T_4 = 0$$

$$T_4 = T_2 + T_3 - T_1 = 80 + 300 - 160 = 220 \ \text{Нм.}$$

2. Разбиваем на расчетные участки
3. Определяем крутящие моменты:

$$T_k = \sum T$$

$0 \le x_1 \le 1$м

$T_{к1} = –T_1 = –160$*Нм.*

$0 \le x_2 \le 1$м

$T_{к2} = –T_1 + T_2 = –160 + 80 = –80$ *Нм.*

$0 \le x_3 \le 2$м

$T_{к3} = –T_1 + T_2 + T_3 = –160 + 80 + 300 =$
$=220$ *Нм.*

4. Определяем касательные напряжения:

$$\tau = \frac{T}{W_\rho}$$

Если d = 0,05м

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 0{,}05^3}{16} = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \ \text{м}^3.$$

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_\rho} = \frac{-160}{2{,}4 \cdot 10^{-5}} = -6{,}5 \ МПа$$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{W_\rho} = \frac{-80}{2{,}4 \cdot 10^{-5}} = -3{,}25 \ МПа$$

$$\tau_3 = \frac{T_3}{W_\rho} = \frac{220}{2{,}4 \cdot 10^{-5}} = 8{,}97 \ МПа$$

5. Проверяем прочность вала:

$$\tau_{\max} \le [\tau]$$

$$\tau_{\max} = \tau_3 = 8{,}97 МП \le [\tau] = 20 МПа$$

Прочность вала достаточна.

6.Строим эпюру угла закручивания

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \frac{T_n \cdot l_n}{G_n \cdot I_{\rho n}}$$

Момент инерции сечения:

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0{,}05^4}{32} = 6 \cdot 10^{-7}\, м^4$$

Выберем некоторое сечение, считая, что его угол закручивания равняется нулю.

$\varphi_A = 0$

$0 \le x_1 \le 1м$

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{T_1 \cdot l_1}{G \cdot I_\rho} = 0 - \frac{160 \cdot 1}{0{,}8 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = -0{,}0033\ рад$$

$0 \le x_2 \le 1м$

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{T_2 \cdot l_2}{G \cdot I_\rho} = -0{,}0033 - \frac{80 \cdot 1}{0{,}8 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = -0{,}005\ рад$$

$0 \le x_3 \le 2м$

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{T_3 \cdot l_3}{G \cdot I_\rho} = -0{,}005 + \frac{220 \cdot 1}{0{,}8 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = 0{,}041\ рад$$

Изгиб

Изгиб возникает при нагрузке бруса силами, перпендикулярными его продольной оси, и парами сил, действующими в плоскостях, проходящих через эту ось. **Изгибом** будем называть такой вид деформирования бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты.

Если изгибающий момент в сечении является единым силовым фактором, а поперечные и продольные силы отсутствуют, изгиб называется **чистым изгибом**. Очень часто в сечении бруса возникают поперечные силы, поэтому такой изгиб называют **поперечным**. Брус, который работает на изгиб, называют **балкой**.

Если балку, которая изгибается под действием внешних сил, рассечь плоскостью перпендикулярной к ее продольной оси, то в каждой точке сечения как результат изгиба действуют нормальные σ и касательные τ напряжения.

Нормальные усилия, действующие на элементарных площадках dA, проводятся к паре сил, момент которой является **изгибающим моментом** внутренних нормальных сил:

$$M_x = \int_A \sigma y dA.$$

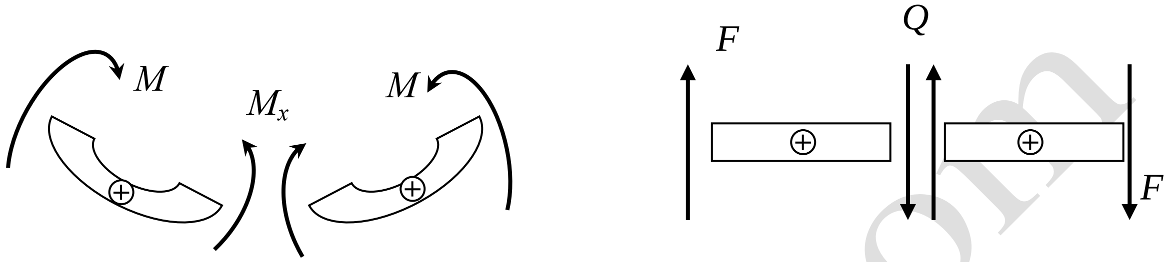
Касательные усилия на своих площадках дают равнодействующую внутренних касательных сил – **поперечную силу**:

$$Q_y = \int_A \tau dA.$$

Изгибающий момент в поперечном сечении численно равен сумме моментов внешних сил, приложенных к отсеченной части балки, относительно центра ее тяжести.

Поперечная сила в сечении численно равна сумме проекций внешних сил, приложенных к отсеченной части балки, на ось, перпендикулярную ее продольной оси.

Принято следующее правило знаков.



Дифференциальные зависимости при изгибе.

Изгибающий момент, поперечная сила и интенсивность распределенной нагрузки связаны следующими зависимостями (зависимостями Д.Н.Журавского):

$$\frac{dQ}{dx} = q$$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

$$\frac{d^2M}{dx} = q.$$

Выводы:

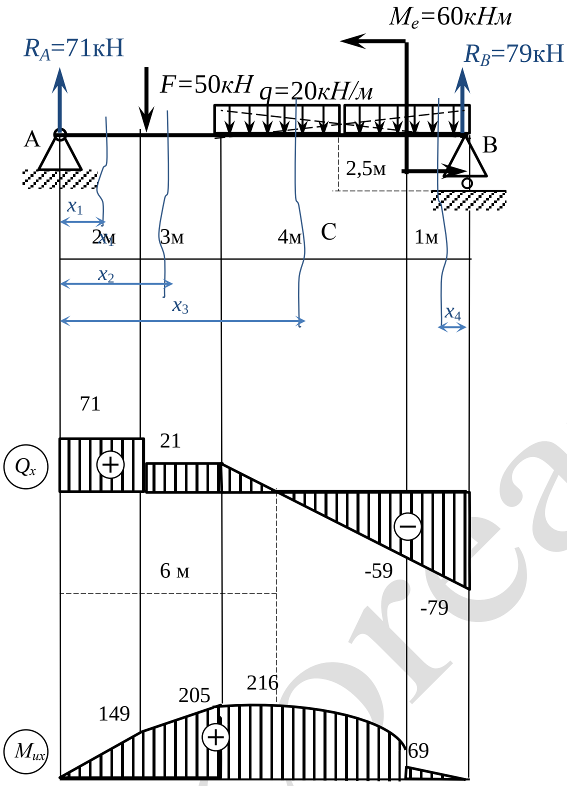
1) Если на некотором участке балки отсутствует распределенная нагрузка (q=0), то эпюра Q – прямая, параллельная оси абсцисс (Q=*const*), а эпюра M на этом участке наклоненная прямая.
2) Если на некотором участке имеется равномерно распределенная нагрузка, то эпюра Q – наклоненная прямая, а эпюра M – парабола.
3) Если на некотором участке балки:
   $Q > 0$, то изгибающий момент возрастает,
   $Q < 0$, то изгибающий момент убывает,
   $Q = 0$, то изгибающий момент постоянный
4) Если поперечная сила, изменяясь по линейному закону, проходит через нулевое значение, то в соответствующем сечении изгибающий момент будет иметь экстремум.
5) Под сосредоточенной силой на эпюре Q образуется скачок на величину приложенной силы, а на эпюре M – резкое изменение угла наклона сопредельных участков.

6) В сечении, где приложена пара сил, эпюра M *будет* иметь скачок на величину момента пары. На эпюре Q это не отразится.

7) Если равномерно распределенная нагрузка направлена вниз, т.е. $\frac{d^2M}{dx}=q<0$ (вторая производная, характеризующая кривизну линии M отрицательная), эпюра M обращена выпуклостью вверх, навстречу нагрузке.

Пример 1:

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, определить опасное сечение балки.



1. Определяем реакции опор

$$\sum M_A=0$$

$$\sum M_A=R_B\cdot 10+M_e-q\cdot 5\cdot(2+3+2,5)-2F=0$$

$$R_B=\frac{q\cdot 5\cdot(2+3+2,5)+2F-M_e}{10}=$$

$$=\frac{20\cdot 5\cdot(2+3+2,5)+2\cdot 50-60}{10}=79кН$$

$$\sum M_B=0$$

$$\sum M_B=-R_A\cdot 10+M_e+q\cdot 5\cdot 2,5+8F=0$$

$$R_A=\frac{q\cdot 5\cdot 2,5+8F+M_e}{10}=$$

$$=\frac{20\cdot 5\cdot 2,5+8\cdot 50+60}{10}=71кН$$

Проверка:

$$\sum Y=0$$

$$R_A-F-5q+R_B=71-50-5\cdot 20+79=0$$

2 Разбиваем на расчетные участки

Определяются изменением внешней нагрузки и жесткостью балки.

3 Строим эпюры поперечных сил Q_x и изгибающих моментов M_x

$\boxed{Q_x=\sum F_i}$ | $\boxed{M_{u_x}=\sum M_i}$

на участке 1 $0<x_1<2$м

$Q_{x1}=R_A=71кН$ – постоянная ($const$)

$M_{u_{x1}}=R_A\cdot x_1$ – линейная зависимость

$M_{u_{x1|x_1=0}}=0$

$M_{u_{x1|x_1=2}}=71\cdot 2=142кН\cdot м$

на участке 2 $2м < x_2 < 5м$

$Q_{x_2} = R_A - F_1 = 71 - 50 = 21кН$ – const

$M_{u_{x_2}} = R_A \cdot x_2 - F(x_2 - 2)$ – линейная

$M_{u_{x2|x_2=2}} = 71 \cdot 2 = 142кН \cdot м$

$M_{u_{x2|x_2=5}} = 71 \cdot 5 - 50 \cdot (5-2) = 355 - 150 = 205кН \cdot м$

на участке 3 $5м < x_3 < 9м$

$Q_{x_3} = R_A - F_1 - q(x_3 - 5)$ – линейная

$Q_{x_{3|x_3=5}} = 71 - 50 = 21кН \cdot м$

$Q_{x_{3|x_3=9}} = 71 - 50 - 20 \cdot (9-5) = -59кН \cdot м$

$M_{u_{x3}} = R_A \cdot x_3 - F(x_3 - 2) - \frac{q(x_3-5)^2}{2}$ – парабола

$M_{u_{x3|x_3=5}} = 71 \cdot 2 - 50 \cdot 3 = 205кН \cdot м$

$M_{u_{x3|x3=9}} = 71 \cdot 9 - 50 \cdot (9-2) - \frac{20(9-5)^2}{2} = 129кН \cdot м$

Так как $M_{u_{x3}}$ – парабола, то для ее построения необходимы три точки.

При $Q_{x_3} = 0$ $M_{u_{x3}}$ имеет экстремум

$$\frac{dM_{u(x_3)}}{dx_3} = 71 - 50 - 20 \cdot (x_3 - 5) = 0$$

$$x_3 = \frac{71-50}{20} + 5 \approx 6м$$

$$M_{u_{x3|x3=6}} = 71 \cdot 6 - 50 \cdot (6-2) - \frac{20(6-5)^2}{2} = 216кН \cdot м$$

на участке 4 $0 < x_4 < 1м$

$Q_{x_4} = -R_B + qx_4$ – линейная

$Q_{x_{3|x_3=5}} = -79кН \cdot м$

$Q_{x_{4|x4=1}} = -79 + 20 \cdot = -59кН \cdot м$

$M_{u_{x4}} = R_B \cdot x_4 - \frac{qx_4{}^2}{2}$ – парабола

$M_{u_{x4|x4=5}} = 0$

$M_{u_{x4|x4=9}} = 79 - \frac{20}{2} = 69кН \cdot м$

$M_{u_{x4|x_4=0,5}} = 79 \cdot 0,5 - \frac{20 \cdot 0,5^2}{2} = 37кН \cdot м$

4. Анализ эпюр

Участок 1	Балка нагружена только сосредоточенной силой. Эпюра Q_{x1} – прямая линия, параллельная оси X. В т. А на эпюре Q_x скачок на величину $R_A = 71кН$.

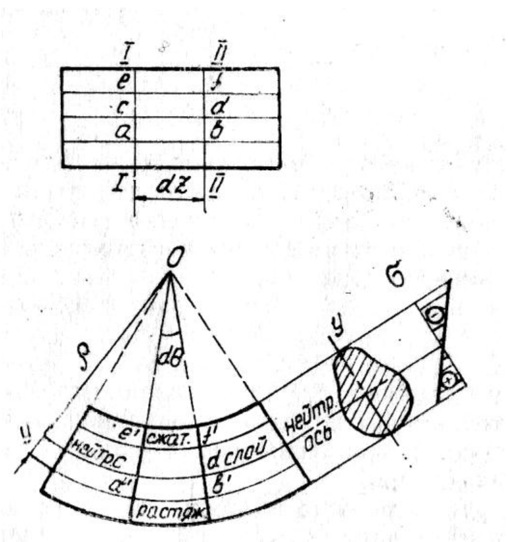
	Эпюра M_x – наклонная прямая, т.к. $Q_{x1}>0$, $M_{u_{x1}}$ возрастает, тангенс угла наклона M_x равен Q_x.
Участок 2	То же самое, что и на участке 1, только $Q_{x1}>Q_{x2}$, поэтому $M_{u_{x1}}$ круче, чем $M_{u_{x2}}$. В точке приложения силы F на эпюре Q_x скачок на величину этой силы $F=-50кН$.
Участок 3	Имеется равномерно распределенная нагрузка, следовательно, Q_{x3} – наклонная прямая, тангенс угла наклона равен q. Так как $q<0$, Q_{x3} убывает. Эпюра $M_{u_{x3}}$ – кривая второго порядка (парабола), имеющая максимум при $Q_{x3}=0$. При $Q_{x3}>0$ $M_{u_{x3}}$ возрастает, при $Q_{x3}<0$ $M_{u_{x3}}$ убывает. Так $q<0$ (направлена вниз, $\frac{d^2M_{u(x_3)}}{dx_3{}^2}<0$), у $M_{u_{x3}}$ выпуклость вверх.
Участок 4	Имеется равномерно распределенная нагрузка, следовательно, Q_{x4} – наклонная прямая. В т. В скачок на величину реакции опоры $R_B=-79кН$. Эпюра $M_{u_{x4}}$ – парабола в выпуклостью вверх. В точке приложения момента на эпюре $M_{u_{x4}}$ скачок на величину момента $M_e=-60кН\cdot м$

Прочность при изгибе

Нормальные напряжения. Расчет на прочность.

Нормальные напряжения зависят только от изгибающего момента, а касательные только от поперечной силы. Это позволяет упростить расчет нормальных напряжений для частного случая **чистого изгиба**, когда $Q = 0$.

Если подвергнуть плоскому изгибу брус с нанесенной на его поверхность сеткой, то наблюдаются следующие факты:



1) линии И и II-II на поверхности балки после деформирования повернутся на некоторый угол $d\theta$, оставаясь прямым, т.е. поперечные сечения плоские до деформирования остаются плоскими и после деформирования (гипотеза плоский сечений);

2) волокно ab на выпуклой стороне удлиняется (волокно растягивается), а волокно ef сокращается (сжимается), длина волокна cd остается без изменений (не испытывает ни растяжения, ни сжатия)

Волокна, не изменяющие своей длины, образуют **нейтральный слой**. Линии пересечения нейтрального слоя с плоскостью сечения балки называется **нейтральная ось**.

Нормальные напряжения в любой точке сечения можно найти по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y .$$

Расчет балок на прочность проводится по максимальным нормальным напряжениям, возникающим в тех поперечных сечениях, где наибольший изгибающий момент.

Для балок пластичных материалов (механические характеристики при растяжении и сжатии одинаковые) условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_x} y_{max} \le [\sigma].$$

В случае симметричного сечения относительно нейтральной оси:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x} \le [\sigma],$$

где $W_x = \dfrac{I_x}{y_{max}}$ – осевой момент сопротивления (величина, которая зависит от формы и размеров сечения).

круг $\quad W_x = \dfrac{\pi \cdot d^3}{32}$;

квадрат $\quad W_x = \dfrac{a^3}{6}$;

прямоугольник $\quad W_x = \dfrac{bh^2}{6}$;

двутавр, швеллер $\quad$ из сортамента.

Для балок из хрупких материалов составляют два условия прочности:

– для зоны растяжения:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_x} y_p \le [\sigma]_p;$$

– для зоны сжатия:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_x} y_c \le [\sigma]_c.$$

Распределение нормальных нагрузок по сечению таково, что часть материала, находящегося около нейтральной оси, почти не нагружена. Наиболее целесообразно использовать двухтавровое поперечное сечение, для которого с наименьшими затратами материала можно получить наибольший момент сопротивления.

Выбор сечения

При растяжении наибольшие нормальные напряжения находятся на максимальном расстоянии от нейтральной оси и равны

$$\sigma_{u\max} = \frac{M_{u\max}}{W_x} \le [\sigma],$$

а возле нейтральной оси материал нагружен мало.
Момент сопротивления сечения

$$W_x > \frac{M_{u\max}}{[\sigma]}.$$

<u>Пример 2</u>: Для балки пример 1 подобрать поперечное сечение.

1. Выбираем двутавровое сечение, для которого момент сопротивления сечения

$$W_x > \frac{216 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,35 \cdot 10^{-3} \left(м^3\right) = 1350 см^3.$$

По сортаменту ГОСТ 8239-87 выбираем двутавровую балку, с $W_x = 1589 см^3 > 1350 см^3$ и площадью поперечного сечения $A_{дв} = 100 см^2$.

2. Выбираем круглое сечение

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{\pi}} \qquad d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1350}{\pi}} = 24 см$$

Площадь поперечного сечения

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 24^2}{4} = 450 см^2.$$

3. Выбираем квадратное сечение со стороной a

$$W_x = \frac{a^3}{6} \quad a_{кв} = \sqrt[3]{6 W_x} \quad a_{кв} = \sqrt[3]{6 \cdot 1350} = 20 см^2$$

Площадь поперечного сечения $A_{кв} = 20^2 = 400 см^2$

Сравним вес балок разногом сечения

$$G = mg = V\rho g = Al\rho g.$$

Так как материал и длина балок одинакова, то

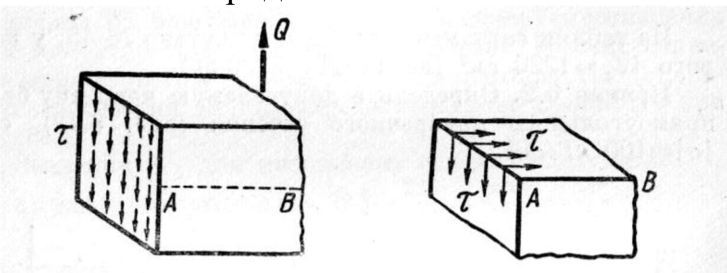
$$\frac{A_{кр}}{A_{дв}} = \frac{450}{100} = 4{,}5 \qquad \frac{A_{кв}}{A_{дв}} = \frac{400}{100} = 4{,}0.$$

Вывод: вес балки круглого сечения в 4,5 раза больше, чем вес балки двутаврового профиля. Вес балки квадратного сечения в 4 раза больше, следовательно, самое экономичное сечение – двутавровое. Кроме того, нормальные напряжения распределены таким образом, вблизи центра тяжести материал мало нагружен, напряжения увеличиваются по мере удаления от нейтрального слоя. Таким образом, наиболее целесообразно применять балки с двутавровым профилем сечения.

Касательные напряжения при изгибе

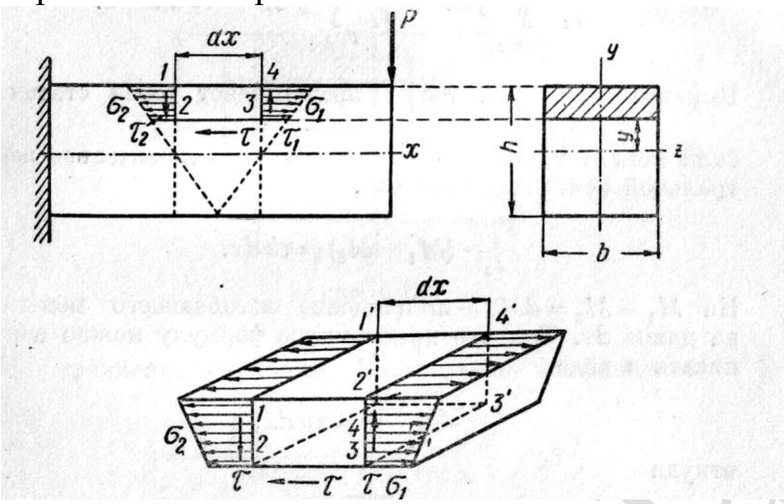
В общем случае изгиба (при поперечном изгибе) в поперечном сечении балки возникают изгибающие моменты и поперечные силы.

Наличие поперечной силы связано с возникновением касательных напряжений в поперечных сечениях балки, а по закону парности касательных напряжений и в ее продольных сечениях.



Рассмотрим балку прямоугольного сечения небольшой ширины. Вырежем из балки элемент длиной *dx* и шириной, равной ширине балки *b*. На этот элемент действуют следующие силы:

– на гране 344/3/ и 122/1/ действуют нормальные и касательные напряжения;
– на гране 322/3/ действуют только касательные напряжения, по закону парности равные касательным напряжением, действующим по вертикальным граням.

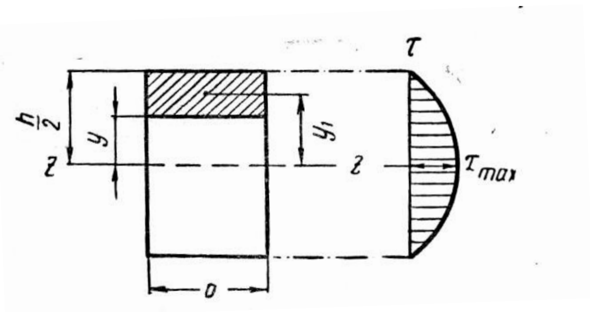


Касательные напряжения определяют по формуле Д.И.Журавского:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{omc}}{b \cdot I_z},$$

где S_z^{omc} – статический момент площади отсеченной части относительно нейтральной оси.

По поперечному прямоугольному сечению касательные напряжения распределяются следующим образом: наибольшие касательные напряжения действуют на уровне нейтральной оси и равняются:



$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A}.$$

Для круглого сечения

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{max} \le [\tau],$$

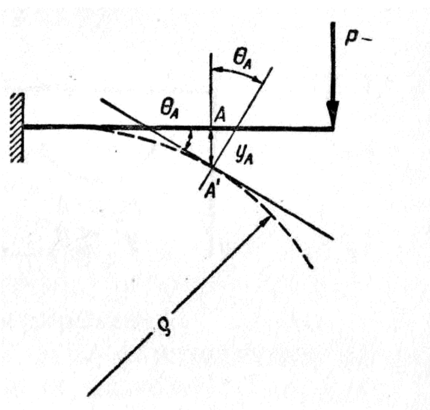
где $[\tau]$ – допустимые касательные напряжения, для стальных балок $[\tau] \approx [\sigma]$.

Некоторые материалы, например, дерево (вдоль волокон) очень плохо сопротивляется сдвигу, поэтому для таких балок проверка прочности за касательными напряжениями обязательная. Также обязательная проверка балок, площадь сечения которых близка по величине к их длине.

Жесткость при изгибе

Чтобы делать вывод о работе балок, недостаточно уметь проводить расчеты только на прочность. Может произойти такое, что довольно прочная балка не будет пригодна к эксплуатации вследствие недостаточной жесткости. Для расчетов на жесткость определяют перемещение при изгибе.

Под действием нагрузки балка искривляется, сечения балки смещаются перпендикулярно прямой оси и вместе с тем возвращаются вокруг своих нейтральных осей.



Смещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется **прогибом**.

Геометрическое место центров тяжести поперечных сечений деформированной балки представляет собой изогнутую ось, которая называется **упругой линией**. Упругую линию можно рассматривать как график некоторой функции, которая определяется характеристикой нагрузки на балку, ее размерами и материалом.

Угол θ, на который поворачивается сечение по отношению к ее первоначальному состоянию, называется **углом поворота сечения**. Угол поворота считают равным углу между касательной к упругой линии в данной точке и осью недеформированной балки.

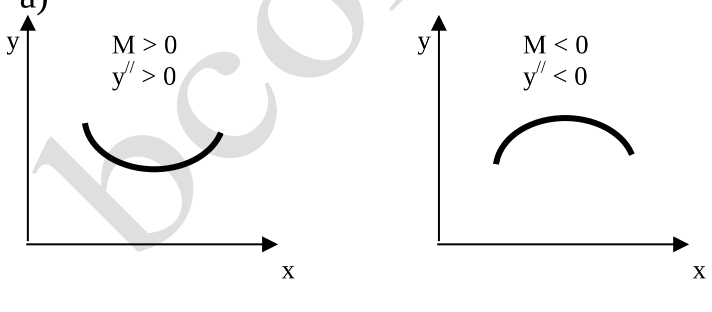
Приблизительное дифференциальное уравнение упругой линии:

$$\pm EI_z y'' = M \;,$$

где EI_z – жесткость при изгибе.

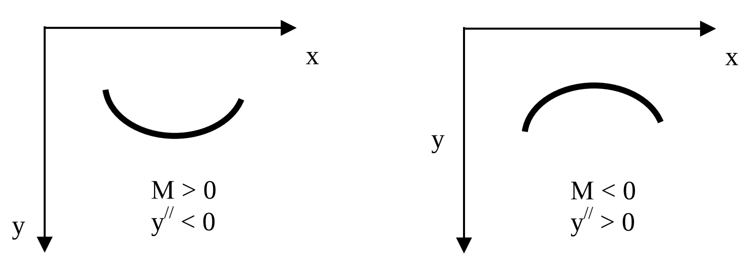
Выбор знака определяется принятой системой координат:

а)



$$\boxed{EI_z y'' = M}$$

б)



$$\boxed{EI_z y'' = -M}$$

Будем принимать систему координат а).

Для определения углов поворота $y' \approx \theta$ и прогибов y необходимо провести интегрирование дифференциального уравнения упругой линии. Это возможно тремя способами: аналитическим, графическим, графоаналитическим.

Аналитический способ:

Уравнение углов поворота:

$$EIy' = \int M dx + C,$$

где C – постоянная интегрирования.

Положительное значение угла поворота θ указывает на то, что сечение поворачивается против часовой стрелки.

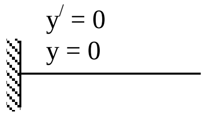
Уравнение прогибов:

$$EIy = \int dx \int M dx + Cx + D,$$

где D – вторая постоянная интегрирования.

Положительное значение прогиба y указывает, что центр тяжести сечения перемещается вверх, т.е. в сторону положительных значений ординат y.

Постоянные интегрирования C и D определяются из начальных условий крепления балки.



Во многих случаях по эксплуатационным соображением максимальные прогибы ограничиваются допустимым прогибом [y].

Условие жесткости пары изгибе:

$$y \le [y].$$

$[y] = \left(\frac{1}{600} \div \frac{1}{700}\right) \cdot l$ – для подкрановых балок (l – пролет балок),

$[y] = \left(\frac{1}{250} \div \frac{1}{500}\right) \cdot l$ – для гражданских сооружений,

$[y] = \left(\frac{1}{1000} \div \frac{1}{300}\right) \cdot l$ – в машиностроении в зависимости от назначения деталей.

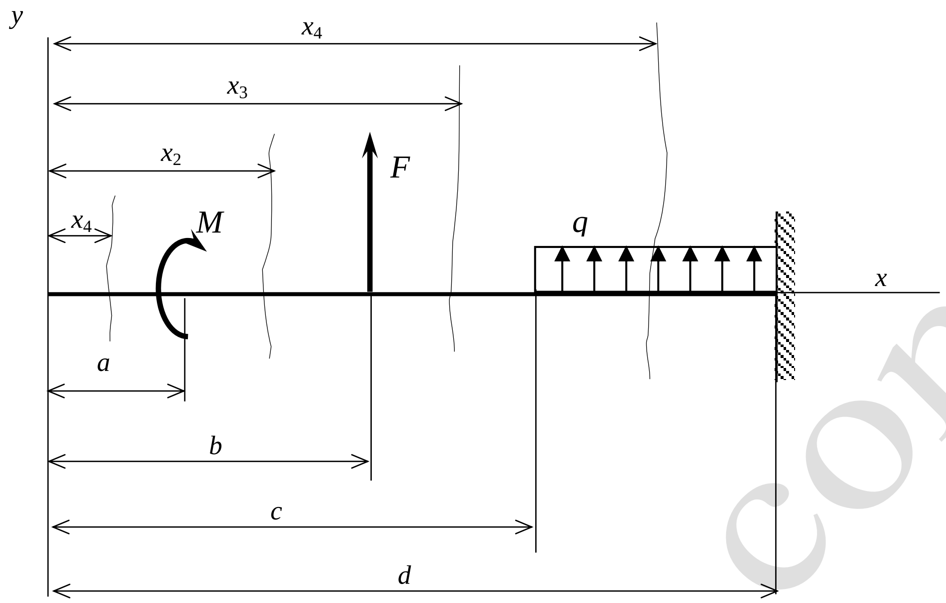
Можно используя искусственные приемы вывести универсальные формулы

для прогиба:

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x + \sum \frac{M(x-a)^2}{2!} + \sum \frac{F(x-b)^3}{3!} + \sum \frac{q(x-c)^4}{4!}$$

для угла поворота:

$$EIy' = EI\theta_0 + \sum M(x-a) + \sum \frac{F(x-b)^2}{2!} + \sum \frac{q(x-c)^3}{3!}$$



Приемы при использовании универсальной формулы:

1. Уравнение изгибающего момента в сечении составлять, рассчитывая момент внешних сил, расположенных между сечением и началом координат.
2. Интегрировать уравнение без раскрытия скобок.

Недостаток этого метода в том, что нельзя определять перемещение в балках переменной жесткости (надо условно превращать в балки постоянной жесткости).

Перемещение для любой линейно деформированной системы при любой нагрузке можно определить методом О. Мор. Этот метод заключается в том, что кроме заданного (нагруженного) состояния *k*, выбирается дополнительное (фиктивное) состояние балки *i* нагруженной единичной силой, действующей в точке, где определяется перемещение, и направленной в направлении перемещения. Рассчитывается виртуальная работа внешних и внутренних сил фиктивного состояния на перемещениях, которые вызваны действием сил нагруженного состояния.

Любое перемещение (линейное или угловое) определяется по формуле (интегралом Мор):

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_i M_k dx}{EI}.$$

Вместо непосредственного вычисления интеграла Мор можно пользоваться графоаналитическим методом (способом перемножения эпюр) - правилом Верещагина.

Интеграл $\int_0^l M_i M_k dx$ равен произведению площади эпюры $M_к$ ($\omega_{к}$) на расположенную под ее центром веса ординату прямолинейной эпюры M_i^c:

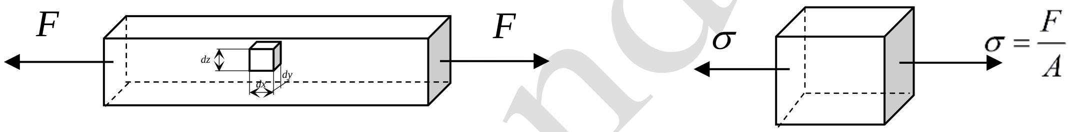
$$\int_0^l M_i M_k dx = \omega_k M_i^c .$$

Знак считается положительным, если обе эпюры расположены с одной стороны. Результаты перемножения ряда эпюр приводятся в справочниках.

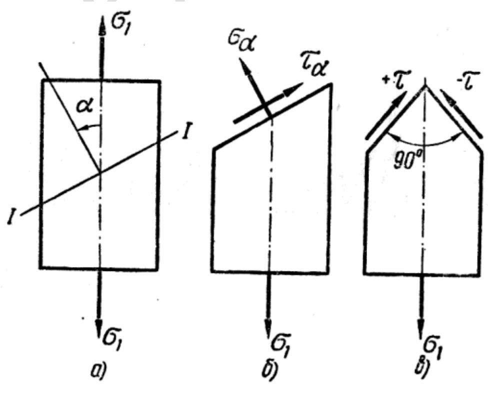
Элементы общей теории напряженного состояния.

Исследовать напряженное состояние в точке - это значит получить зависимости, позволяющие определить напряжение на любой площадке, проходящей через эту точку.

Если вырезать вокруг произвольной точки стрежня поперечными и продольными перерезами бесконечно малый параллелепипед, на его гранях будут действовать только нормальные напряжения. Отсутствие нормальных напряжений на других гранях является следствиям того, что нет нажатия продольных волокон одно на один.



В общем случае в наклоненных сечениях будут действовать нормальные σ_α и касательные τ_α напряжение, величину которых можно найти из условия равновесия:



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha ,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha .$$

Максимального значения нормальные напряжения будут достигать при $\alpha = 0$, т.е. в сечении, перпендикулярном к оси стрежня, при этом $\tau = 0$.

Площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения имеют экстремальные значения, называются **главными площадками**. Нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются **главными напряжениями**.

При $\alpha = 90^0$ – $\sigma = 0, \tau = 0$ – в продольных сечениях нет ни нормальных, ни касательных напряжений.

При $\alpha = 45^0$ – $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$ – максимальные касательные напряжения (при испытаниях на растяжение образцов из малоуглеродистых сталей на их поверхностях появляются заметные наклоненные линии – следствия сдвига частиц материла относительно друг друга - линии Чернова).

По перпендикулярным площадкам действуют равные касательные напряжения - закон парности касательных напряжений:

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+90^0}.$$

В каждой точке нагруженного бруса можно найти такое положение параллелепипеда, при котором три его грани окажутся главными площадками. На двух из них будут действовать экстремальные (наибольшие и наименьшие) главные напряжения, а на третьем - промежуточные.

Принимают $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Если все три напряжения не равны нулю - объемное, трёхосное состояние.

Если одно из напряжений равняется нулю - плоское, двухосное состояние.

Если лишь одно из напряжений не равняется нулю - линейное, одноосное состояние.

Деформации, соответствующие напряженным состоянием, рассчитываются на основе принципа независимости действия сил на грани элемента.

Связь между относительной деформацией и напряжениями при объемном напряженном состоянии - обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Теории прочности

Важной задачей инженерных расчетов является оценка прочности по известному напряженному состоянию, т.е. по известным главным напряжениям.

При линейном напряженном состоянии предельные (опасное) напряжения легко установить экспериментально:

$\sigma_{np} = \sigma_T$ – для пластичных материалов,

$\sigma_{np} = \sigma_B$ – для хрупких материалов.

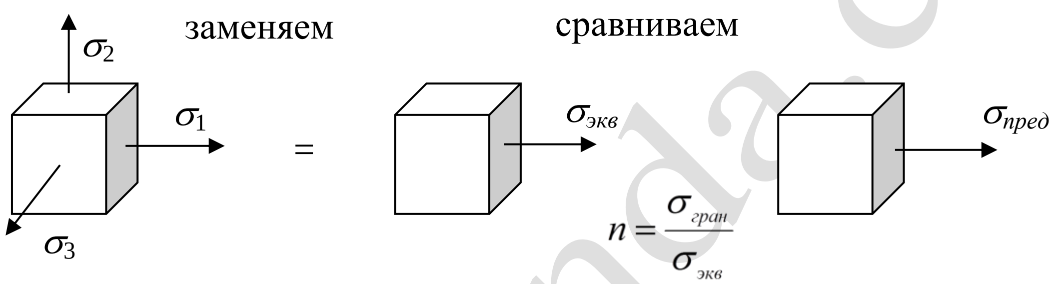
Условие прочности для одноосного напряженного состояния:

$\sigma_1 \le [\sigma_p]$ – растяжение,

$\sigma_3 \le [\sigma_c]$ – сжатие.

При сложном напряженном состоянии экспериментально выявить предельные величины главных напряжений очень сложно. Для оценки прочности в условиях любого сложного состояния, высказывается гипотеза о преимуществе влияния на прочность того или другого фактора.

В расчетах на прочность заменяют сложное напряженное состояние равноопасным (эквивалентным) ему одноосным состоянием и сравнивают соответствующее напряжение с предельным, полученным в испытаниях на простое растяжение.



Гипотезы, которые указывают на признаки равной опасности разных напряженных состояний, называются **теориями прочности**.

Первая теория прочности – теория наибольших нормальных напряжений (целесообразна для довольно хрупких материалов):

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 \le [\sigma_p]$$

$$\sigma_{екв} = |\sigma_3| \le [\sigma_c].$$

Вторая теория прочности – теория наибольших деформаций (целесообразна для хрупкого состояния материала):

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma].$$

Третья теория прочности – теория наибольших касательных напряжений (целесообразна для пластичных и хрупких материалов)

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma].$$

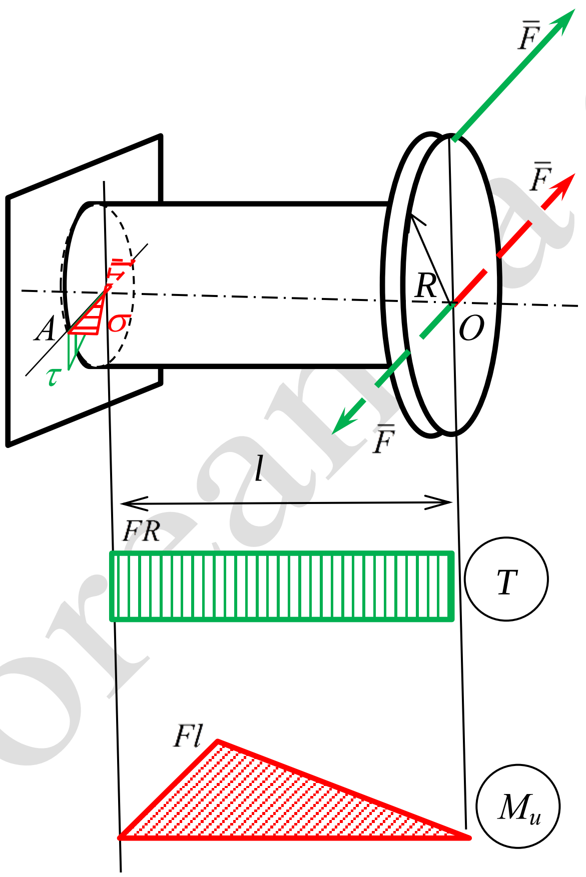
Четвертая теория прочности – энергетическая теория формоизменения (целесообразна для пластичных материалов):

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - -\sigma_1\sigma_3} \le [\sigma].$$

Изгиб с кручением

Часто встречаются случаи нагружения бруса, когда в поперечных сечениях одновременно действуют несколько силовых факторов (**сложное сопротивление**). При расчетах на сложное сопротивление выходят из принципа независимости действия сил, т.е. считают, что влиянием деформаций, вызванных одной из приложенных к упругой системе нагрузок, на результат действия других можно пренебрегать.

На диск, закрепленный на конце бруса, действует сила F. Приложим в точке O две равные и противоположно направленные силы F. Действие силы на брус можно представить крутящим моментом пары сил и силой F, приложенной в точке O и вызывающей поперечный изгиб.



Опасное сечение определяется по эпюрам крутящих и изгибающих моментов. Крутящий момент вызывает только касательные напряжения τ, максимального значения которые достигают в точках контура поперечного сечения. Изгибающий момент действует в горизонтальной плоскости, наибольшие напряжения σ на концах горизонтального диаметра. Для вывода о прочности необходимо определить главные нормальные и касательные напряжения.

В точке А наблюдается плоское напряженное состояние с главными напряжениями:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 + 4\tau^2\right)$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\min} = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 - 4\tau^2\right).$$

Экстремальные значения касательных напряжений:

$$\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

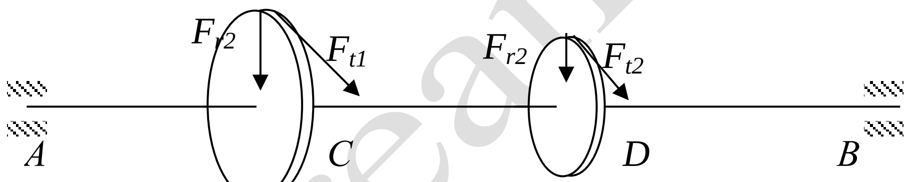
Для проверки прочности используют теории прочности. Чаще всего третью

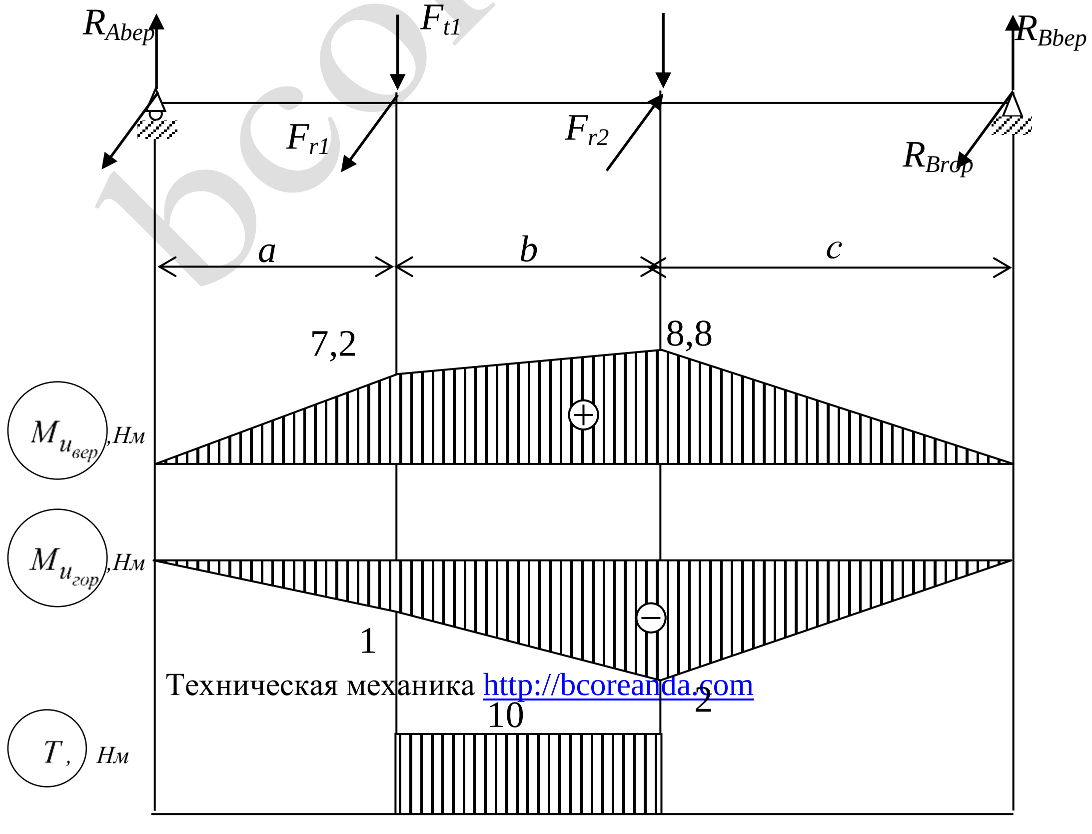
$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_u^2 + M_k^2}}{W_x} \le [\sigma]$$

или четвертую

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0{,}75M_k^2}}{W_x} \le [\sigma].$$

Пример. Проверить вал диаметром 20 *мм* на прочность, если F_{t1} = 200*Н*, F_{t2} = 600*Н*, F_{r1} = 50*Н*, F_{r2} = 200*Н*, T = 10*Нм*, a = 20 *мм*, b = 10 *мм*, c = 20 *мм* материал сталь 40Х, для которой [σ]=50 МПа:





Рассмотрим отдельно изгиб и кручение, при чем, изгиб в двух плоскостях. Будем считать, что окружные силы F_t действуют в вертикальной плоскости, а радиальные F_r - в горизонтальной.

Реакции в опорах определяем из уравнений равновесия.

В вертикальной плоскости:

$$\sum M_A = 0$$
$$R_{B_{вер}}(a+b+c) - F_{t_1}a - F_{t_2}(a+b) = 0,$$

отсюда:

$$R_{B_{вер}} = \frac{F_{t_1}a + F_t(a+b)}{a+b+c}$$
$$R_{B_{вер}} = \frac{200\cdot 20 + 600\cdot 30}{50} \approx 440\,\text{Н}.$$
$$\sum M_B = 0$$
$$-R_{A_{вер}}(a+b+c) + F_{t_1}(b+c) + F_{t_2}c = 0,$$

отсюда:

$$R_{A_{вер}} = \frac{F_{t_1}(b+c) + F_{t_2}c}{a+b+c}$$
$$R_{A_{вер}} = \frac{200\cdot 30 + 600\cdot 20}{50} \approx 360\,\text{Н}.$$

В горизонтальной плоскости

$$\sum M_A = 0$$
$$-R_{B_{гор}}(a+b+c) - F_{r_1}a + F_{r_2}(a+b) = 0,$$

отсюда:

$$R_{B_{гор}} = \frac{F_{r_2}(a+b) - F_{r_1}a}{a+b+c}$$
$$R_{B_{гор}} = \frac{200\cdot 30 - 50\cdot 20}{50} \approx 100\,\text{Н}.$$
$$\sum M_B = 0$$
$$R_{A_{гор}}(a+b+c) + F_{r_1}(b+c) - F_{r_2}c = 0,$$

отсюда:

$$R_{A_{гор}} = \frac{F_{r_2}c - F_{r_1}(b+c)}{a+b+c}$$
$$R_{A_{гор}} = \frac{200\cdot 20 - 50\cdot 30}{50} \approx 50\,\text{Н}.$$

Строим эпюры изгибающих и крутящих моментов. На вал действуют только сосредоточенные силы, в этом случае изгибающие моменты на опорах равны нулю и изменяются по линейным законам. Поэтому для построения эпюр изгибающих моментов необходимо вычислить их значение в точках C и D.

$$M_{C_{вер}} = R_{A_{вер}} \cdot a$$

$$M_{C_{вер}} = 360 \cdot 0{,}02 = 7{,}2\,\text{Н·м}$$

$$M_{C_{гор}} = -R_{A_{гор}} \cdot a$$

$$M_{C_{гор}} = -50 \cdot 0{,}02 = -1\,\text{Н·м}$$

$$M_{D_{вер}} = R_{B_{вер}} \cdot c$$

$$M_{D_{вер}} = 440 \cdot 0{,}02 = 8{,}8\,\text{Н·м}$$

$$M_{D_{гор}} = -R_{B_{гор}} \cdot c$$

$$M_{D_{гор}} = -100 \cdot 0{,}02 = -2\,\text{Н·м}$$

По полученным результатам строим эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а также эпюру крутящего момента, который равняется *T*, и действует между точками *C* и *D*.

Из построенных эпюр видно, что, с точки зрения прочности, наиболее опасным является сечение в точке *D*, где действуют максимальные изгибающие моменты.

Определяем приведенный момент в расчетном сечении, используя III теорию прочности наибольших касательных напряжений:

$$M_{пр} = \sqrt{M^2_{D_{вер}} + M^2_{D_{гор}} + T_2^2}$$

$$M_{пр} = \sqrt{8{,}8^2 + (-2)^2 + 10^2} = 13.5\,\text{Н·м}.$$

Эквивалентные напряжения:

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{пр}}{W} = \frac{M_{пр}}{0{,}1d^3}$$

$$\sigma_{экв} = \frac{13.5}{0{,}1 \cdot 0{,}02^3} = 16{,}9 МПа < [\sigma] = 50 МПа$$

Прочность вала достаточная.

КИНЕМАТИКА

Кинематика точки.

Траектория движения точки.

Кинематика рассматривает движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, т.е. без учета сил, вызывающих это движение.

Механическим движением тела называется изменение его положения относительно другого тела, происходящее в пространстве с течением времени.

Под **точкой** понимают тело, размерами которого при решении задачи можно пренебречь.

Задать способ описания движения точки означает установить совокупность таких параметров, с помощью которых можно однозначно установить положение точки в пространстве в любой момент времени относительно выбранной системы отсчета.

Траектория движения – это линия, которую описывает подвижная точка относительно выбранной системы отсчета.

По виду траектории можно охарактеризовать **вид движения** точки.

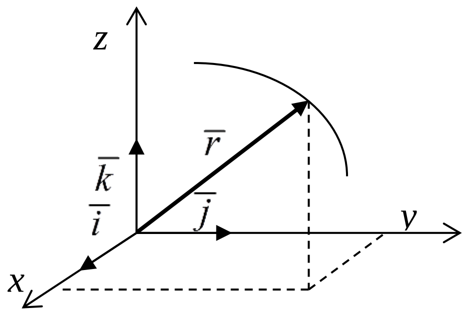
1. Если, траектория движения точки прямая линия, движение называется **прямолинейным**.
2. Если, траектория движения точки кривая линия, движение называется **криволинейным**.

Для задания движения точки существует **3 способа**:
1. векторный;
2. координатный;
3. естественный.

Способы задания движения точки

Векторный способ задания движения точки.

Положение точки в любой момент времени можно определить с помощью вектора $\overline{r}$, проведенного из начала отсчета О в подвижную точку М.



Вектор $\overline{r}$ называется **радиус – вектор** точки М – вектор, проведенный из неподвижной точки пространства в подвижную.

Закон движения точки в векторной форме.

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

Относительно координатных осей уравнения движения точки в векторной форме:

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$$

Геометрическое место конечных точек радиус-вектора $\bar{r}$ - **годограф** этого вектора – определяет **траекторию** движения точки.

Координатный способ задания движения точки.

Определение траектории точки.

Закон движения точки при координатном способе задачи движения в декартовой системе отсчета (можно выбрать любую систему координат, например, полярную, сферическую и т.д.)

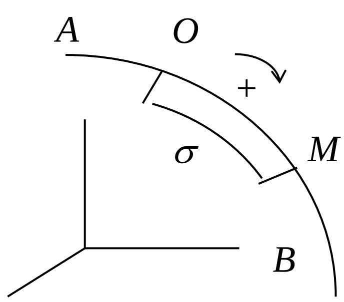
$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

Уравнение движения представляют собой одновременно **уравнение траектории точки в параметрической форме**, где параметром является время t.

Естественный способ задания движения точки.

Для **задачи движения точки натуральным способом** надо знать:

1. траекторию точки (АВ);
2. начало отсчета дуговой координаты на траектории (т. О);
3. положительное и отрицательное направление отсчета дуговой координаты($\pm$);
4. закон движения точки вдоль траектории $\sigma = f(t)$.



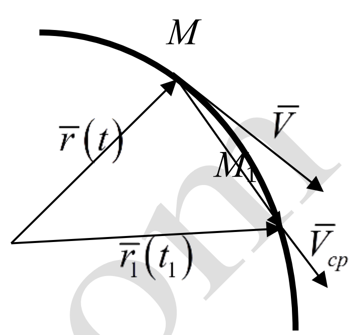
Положение точки М на траектории АВ будет однозначно установлено в каждый момент времени **криволинейной (дуговой) координатой** σ=ОМ – расстояние от неподвижной точки О до точки М вдоль дуги траектории с соответствующим знаком.

Закон движения точки вдоль траектории:

$$\sigma = f(t)$$

Скорость точки.

Скорость точки – одна из основных кинематических характеристик движения, векторная величина, которая характеризует быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.



Каждому положению точки M и M_1 в моменты времени t и t_1 соответствует значение радиуса-вектора $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}_1(t_1)$, тогда $\Delta t = t_1 - t$.

Вектор перемещения точки $\overline{MM_1}$ за промежуток время Δt направлен *по хорде,*

Средней скоростью точки называется векторная величина, которая равняется отношению вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени:

$$\overline{V_{CP}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}$$

Направление вектору $\overline{V_{CP}}$ совпадает с вектором перемещения $\overline{MM_1}$.

Скорость точки в данный момент времени – это векторная величина, которая равняется первой производной от радиус-вектора точки по времени:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{r}$$

Вектор скорости точки в данный момент времени направлен **по касательной к траектории** точки в сторону движения.

Единицей измерения скорости является 1 м/с**.**

Определение скорости по проекциям на оси координат.

При координатном способе задания движения точки проекции скорости на оси координат определяются как первые производные от соответствующих координат точки по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Модуль вектора скорости равняется:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Направление вектора скорости:

$$\cos(\overline{V},\overline{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\overline{V},\overline{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\overline{V},\overline{k}) = \frac{V_z}{V}$$

Определение скорости точки при естественном способе задания движения точки.

Алгебраическая (численная) величина скорости точки в данный момент времени равняется первой производной от дуговой координаты точки по времени:

$$V = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}$$

Алгебраическая (численная) величина скорости определяет одновременно и модуль вектора скорости и направление (по знаку производной).

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$, определяется с помощью интеграла

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\sigma}| dt .$$

Дуговую координату $\sigma(t)$ не следует отождествлять с длиной пути.

Ускорение точки.

Ускорением точки в данный момент времени называются первую производную скорости по времени или вторую производную радиус-вектора точки по времени

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{\bar{r}}$$

При координатном способе задания движения проекции вектора ускорения точки в данный момент времени определяются как первые производные от проекций скорости или вторые производные от координат точки по времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}\ , \ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, \ a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$$

Модуль вектора ускорения равняется:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Направление ускорения:

$$\cos(\bar{a},\bar{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(a\,\bar{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\bar{a},\bar{k}) = \frac{a_z}{a}$$

Единицы измерения ускорения 1 м/с^2.

Касательное и нормальное ускорение.

Касательным (тангенциальным) ускорением a_τ точки называется проекция ускорения точки на касательную к траектории, т.е. на вектор скорости.

Касательное ускорение равняется первой производной от алгебраической величины скорости или второй производной от дуговой координаты s за временем:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a_\tau = \dot{V} = \ddot{\sigma}$$

В практических расчетах касательное ускорение часто определяют по формуле

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{V}.$$

Касательное ускорение характеризует изменение скорости точки **по величине**.

Значение касательного ускорения *характеризует движение* точки:

1. $a_\tau = 0$ – вектор скорости не изменяется по величине;
2. $a_\tau > 0$ – вектор скорости совпадает с касательным ускорением − движение точки **ускоренное**;
3. $a_\tau < 0$ – вектор скорости направлен противоположно касательному ускорению −движение точки **замедлено.**

Нормальным ускорением точки a_n называется проекция ускорения точки на главную внутреннюю нормаль к траектории.

Нормальное ускорение равняется:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

где ρ − радиус кривизны траектории в данной точке.

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости **п направлению**.

Нормальное ускорение всегда положительная величина.

Нормальное ускорение характеризует *движение по виду траектории* точки:

$a_n \neq 0$ − движение точки криволинейное ($\rho \neq 0$);

$a_n = const$ − движение криволинейное и траектория окружность известного радиуса;

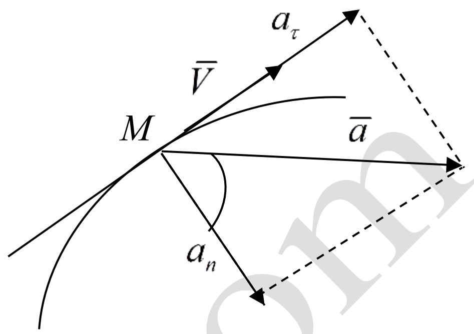
- $a_n = 0$ − движение точки прямолинейное ($\rho \to 0$)

Ускорение **точки** (полное ускорение) $\bar{a}$ определяется как векторная сумма касательного и нормального ускорений.

$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Кинематика твердого тела.

Поступательное движение твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая линия, проведенная в теле, перемещается параллельно своему начальному положению.

При поступательном движении:

– все точки тела описывают одинаковые траектории;

– скорости всех точек тела одинаковы в данный момент времени $\bar{V}_A = \bar{V}_B$;

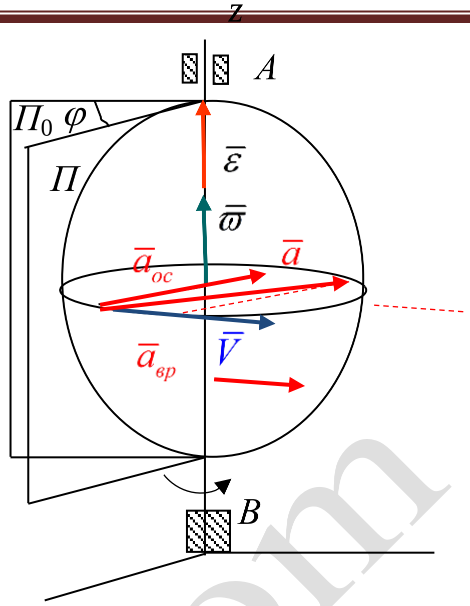
– ускорение всех точек тела одинаковы в данный момент времени $\bar{a}_A = \bar{a}_B$;

Поступательное движение твердого тела полностью определяется движением любой одной его точки, т.е. кинематика поступательного движения может быть сведена к кинематике точки.

Вращательное движение твердого тела.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором остаются неподвижными все точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения.

Все другие точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения и описывают окружности, радиусы которых равняются расстояниям от точек до оси вращения, а центры лежат на неподвижной оси.



$П_0$ – неподвижная полуплоскость,
$П$ – подвижная полуплоскость,
AB – неподвижная ось вращения.

φ - **угол поворота** - двугранный угол, который образуется при вращении тела, между подвижной и неподвижной полуплоскостями.

Каждому моменту времени соответствует определенное значение угла поворота, т.е. угол φ является функцией времени и представляет собой **закон вращательного движения:**

$$\varphi = f(t)$$

Единицей измерения угла вращения является 1 радиан.

Угловая скорость тела

Угловая скорость $\bar{\varpi}$ – вектор, направленный вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращения тела видно против движения часовой стрелки и проекция которого на ось вращения равняется первой производной от угла поворота по времени.

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Угловая скорость определяет направление вращения тела.
Если:
$\omega_z > 0$ – вращение тела против часовой стрелки;
$\omega_z < 0$ – вращение тела по часовой стрелке;
$\omega_z = 0$ – остановка вращения или изменение направления вращения.
Единицы измерения угловой скорости 1 (рад/сек) или (с $^{-1}$) .

Угловое ускорение тела.

Угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ – вектор, направленный вдоль оси вращения и его проекция на ось вращения равняется первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени.

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\varepsilon_z = \dot{\varpi}_z = \ddot{\varphi}$$

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ не имеют точки приложения, являются *скользящими условными векторами*.

Вращение тела считается:

– *ускоренным*, если модуль угловой скорости с течением времени возрастает, т.е. величины ω и ε совпадают по знаку: ω_z>0 и ε_z>0 или ω_z<0 и ε_z<0.

– *замедленным*, если модуль угловой скорости с течением времени уменьшается, т.е. величины ω и ε противоположные по знаку: ω_z > 0 и ε_z < 0 или ω_z < 0 и ε_z > 0.

– *равномерным*, если – угловая скорость тела постоянна $\omega_z = const$ и ε_z = 0.

Единица измерения углового ускорения 1 (рад/сек $^{-2}$) или 1 (с $^{-2}$).

Угловая скорость и угловое ускорение – кинематические характеристики всего тела.

Скорость точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

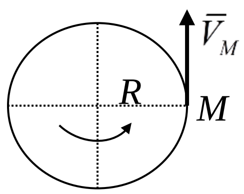
Скорости отдельных точек тела называют **линейными** или **окружными.**

Линейная (окружная) скорость точки $\bar{V}$ зависит от угловой скорости тела ω и радиуса вращения R.

Модуль линейной скорости точки тела, вращающегося с угловой скоростью ω равен:

$$V = \omega \cdot R \ ,$$

где R – расстояние от соответствующей точки до оси вращения.



Вектор линейной скорости направлен по касательной к траектории – окружности вращения, т.е. $\bar{V} \perp R$.

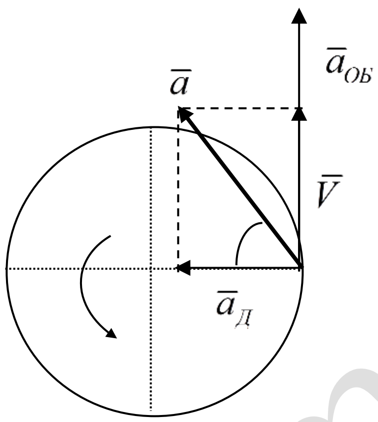
Ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Линейное ускорение точки тела при вращении складывается из вращательного $\overline{a_{BP}}$ $(\bar{a}_\tau)$ и осестремительного $\overline{a_{OC}}$ $(\bar{a}_n)$ ускорения, составляющих полное ускорение $\bar{a}$.

Вращательное ускорение a_{BP} (касательное) ускорение зависит от алгебраической величины углового ускорения тела ε и радиуса вращения R.

$$a_{BP} = \frac{dV}{dt} = \frac{R \cdot d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon,$$

$$a_{BP} = R \cdot \varepsilon$$



Вектор $\overline{a_{BP}}$ направлен по касательной к окружности коллинеарно вектору скорости.

Осестремительное ускорение a_{OC} (нормальное) ускорение точки зависит от угловой скорости вращения тела и радиуса вращения R:

$$a_{OC} = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

$$a_{OC} = \omega^2 \cdot R$$

Вектор осестремительного $\overline{a_{OC}}$ ускорения направлен по радиусу вращения точки к центру вращения.

Полное ускорение точки тела $\bar{a}$ определяют, как векторную сумму вращательного $\overline{a_{BP}}$ и осестремительного $\overline{a_{OC}}$ ускорений:

$$\bar{a} = \overline{a_{BP}} + \overline{a_{OC}}$$

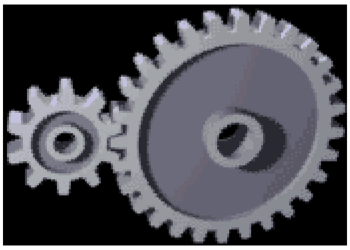
Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_{BP}^2 + a_{OC}^2} = R \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Кинематика зубчатых механизмов

Механизм - система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в необходимые движения других тел.

Передаточный механизм служит для преобразования вида движения, изменения величины и направления скорости рабочего органа.



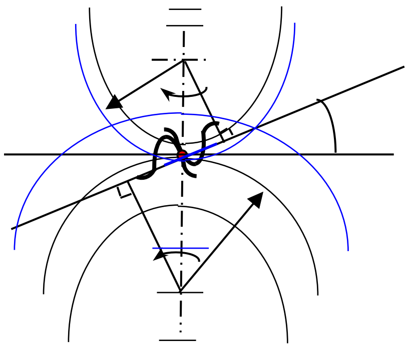
Зубчатые механизмы – механизмы, в которых передача движения от одного звена к другому происходит по помощи зубьев, нанесенных на поверхность звена.

Они получили широкое использование в технике: кинематических передачах, приборах и т.п.

Профиль зубьев зубчатых колес чаще всего эвольвентный.

Эвольвента – траектория точки, лежащей на прямой, которая может быть получена в результате перекатывания прямой по окружности без скольжения.

Основная теорема зацепления - теорема Виллиса



Зацепление зубьев зубчатых колес будет непрерывным с постоянным передаточным отношением, если общая нормаль к боковым профилям зубьев делит межосевое расстояние на части обратно пропорциональные угловым скоростям, а точка пересечения общей нормали с линией центров занимает постоянное положение. Она выражается отношением:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{R_2}{R_1},$$

где i – передаточное отношение пары зубчатых колес.

Передаточное число u – это передаточное отношение в направлении силового потока.

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

где n – частота вращения колес

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Полюс зацепления (P) – точка пересечения общей нормали с линией центров.

Окружности, проходящие через полюс зацепления, называются **основными окружностями**. В процессе вращения зубчатых колес эти окружности перекатываются друг по другу без скольжения. В передачах, изготовленных без смещения режущего инструмента, основные окружности совпадают с делительными. Общая нормаль n-n имеет название **линия зацепления**, все точки контакта зубьев всегда находятся на этой линии.

Угол между общей нормалью и общей касательной называется **угол зацепления** ($\alpha = 20^0$). Отрезок N_1N_2 называется теоретическая линия зацепления. Действительная линия зацепления лежит на пересечении линии NN с окружностями вершин - отрезок ab.

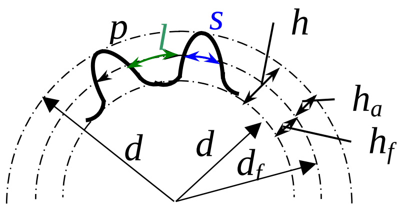
За время зацепления пары зубьев точка бокового профиля зуба, лежащего на делительной окружности, описывает траекторию, которая называется **дугой зацепления.**

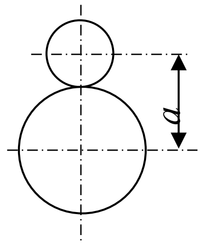
Преимущества эвольвентных передач:

– возможность изменения в некоторых пределах межосевого расстояния без нарушения сопряженных профилей,
– зацепление колеса с любым другим колесом при одинаковых параметрах зацепления,
– возможность осуществления передачи без мертвого хода,

– относительно простое изготовление колес.

Основные геометрические параметры зубчатых передач





Шаг зацепления	P, мм	
Ширина колеса	b, мм	
Модуль	m, мм	$m = \frac{p}{\pi}$
Число зубьев шестерни колеса	z_1 z_2	
Делительные диаметры шестерни колеса	d_1 мм d_2 мм	$d = mz$
Диаметры вершин шестерни колеса	d_a мм d_a мм	$d_a = d + 2m$
Диаметры впадин шестерни колеса	d_f мм d_f мм	$d_f = d - 2{,}5m$
а зуба	h мм	$h = 2{,}25m$
Высота головки зуба	h_a мм	$h_a = m$
Высота ножки зуба	h_f мм	$h_f = 1{,}25m$
Толщина зуба	s,мм	$s = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2}$
Ширина впадины	l,мм	$l = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2}$
Межосевое расстояние	a, мм	$a = \frac{d_1 + d_2}{2}$
Передаточное число	u	$u = \frac{z_2}{z_1}$

С помощью одной пары зубчатых колес возможно реализовать передаточное отношение до 6. Если надо реализовать большее передаточное отношение используют сложные зубчатые механизмы:

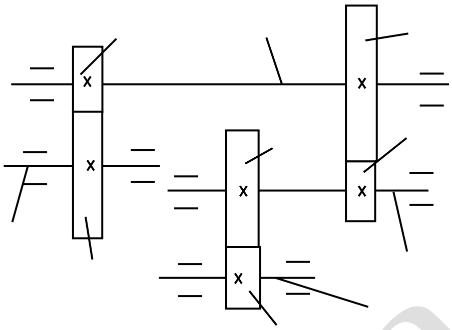
– механизмы с недвижимыми осями;

– механизмы, в которых некоторые оси вращаются вокруг неподвижных осей (сателитные).

Механизмы с неподвижными осями:

– ступенчатые,
– рядуые.

Ступенчатое зацепление – колеса находятся в зацеплении попарно (стрелочный электропривод).



Передаточное отношение по степеням:

$$i_{I-II} = \frac{n_I}{n_{II}} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$i_{II-III} = \frac{n_{II}}{n_{III}} = \frac{z_4}{z_3}$$

$$i_{III-IV} = \frac{n_{III}}{n_{IV}} = \frac{z_6}{z_5}$$

$$i_{I-IV} = i_{I-II} \cdot i_{II-III} \cdot i_{III-IV} = \frac{n_I}{\cancel{n}_{II}} \cdot \frac{\cancel{n}_{II}}{\cancel{n}_{III}} \cdot \frac{\cancel{n}_{III}}{n_{IV}} = \frac{n_I}{n_{IV}} = \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}$$

Общее передаточное отношение ступенчатого механизма равняется произведению передаточных отношений отдельных степеней, или отношению произведения чисел зубьев парных зубчатых колес к произведению чисел зубьев непарных зубчатых колес.

Знак передаточного отношения:

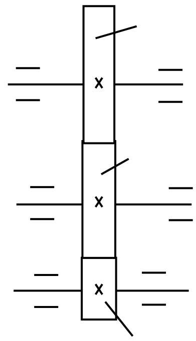
для внешнего зацепления „ – „

для внутреннего зацепления „ +”

Когда количество внешних зацеплений нечетное знак «–», когда четное «+».

$$i_{I-IV} = \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}(-1)^n.$$

Рядное зацепление – общее передаточное отношение равняется произведению передаточных чисел отдельных степеней.



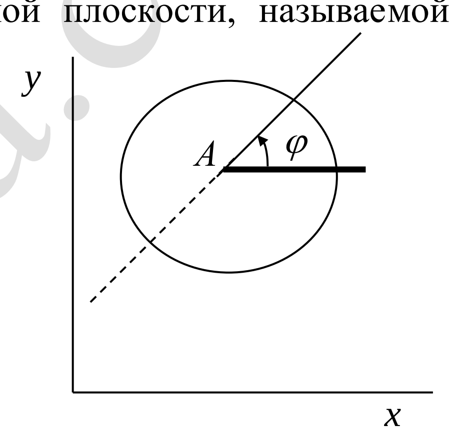
$$i_{I-III} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{z_3}{z_1}(-1)^n.$$

Общее передаточное отношение рядового зацепления зависит от количества зубьев крайних механизмов. Промежуточные зубчатые колеса, не влияющие на передаточное отношение, называются паразитарными.

Плоскопараллельное движение твердого тела.

Плоскопараллельным или **плоским** движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях параллельных некоторой недвижимой плоскости, называемой *базовой*.

Изучение плоского движения абсолютно твердого тела можно свести к изучению движения одной **плоской фигуры** (сечения), которое определяется движением трех его точек, не лежащих на одной прямой.



Точка A – **полюс** с координатами $X_A = X_A(t)$, $Y_A = Y_A(t)$. Задав угол поворота тела вокруг прямой, которая проходит через полюс A перпендикулярно к плоскости сечения $\varphi = \varphi(t)$, получим **закон плоскопаралельного движения**:

$$X_A = X_A(t),\ Y_A = Y_A(t)\ ,\ \varphi = \varphi(t)$$

Уравнения $X_A = X_A(t)$ и $Y_A = Y_A(t)$ являются уравнениями *поступательного движения полюса A*, а уравнение $\varphi = \varphi(t)$ описывает закон *вращательного движения плоской фигуры вокруг полюса*.

Плоскопараллельное движение твердого тела состоит из поступательного, при котором все точки тела движутся вместе с полюсом, и вращательного движения вокруг полюса. Вращательная часть движения не зависит от выбора полюса, а поступательная зависит.

Основные кинематические характеристики плоского движения тела:

- скорость $\overline{V_A}$ и ускорение $\overline{a_A}$ поступательного движения полюса,

- угловая скорость $\overline{\omega}$ и угловое ускорение $\overline{\varepsilon}$ вращательного движения вокруг полюса.

Траектория произвольной точки M плоской фигуры определяется расстоянием от точки M до полюса A и углом вращения φ вокруг полюса.

Определение скоростей точек плоской фигуры.

Скорость произвольной точки тела определяется **теоремой:** скорость любой точки *M* тела равняется геометрической сумме скорости точки *A*, принятой за полюс, и вращательной скорости точки *M* в ее вращательном движении вместе с телом вокруг полюса *A*.

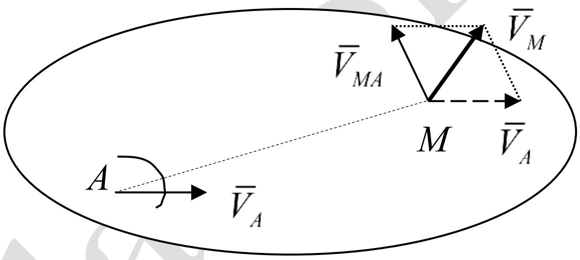
$$\overline{V_M} = \overline{V_A} + \overline{V_{MA}}$$

Вращательная скорость точки *M* в ее вращении вокруг полюса *A*:

$$V_{MA} = \omega \cdot MA$$

где ω − угловая скорость вращательного движения тела вокруг полюса.

Вектор $\overline{V_{MA}}$ направлен по касательной к окружности радиуса *MA*, по которой вращается точка *M* вокруг полюса *A*, т.е. $\overline{V_{MA}} \perp MA$ в направлении вращения.



Модуль и направление скорости $\overline{V_M}$ находится построением соответствующего параллелограмма.

A – полюс,

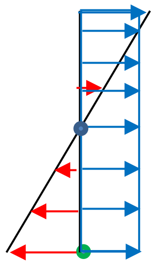
$\overline{V_A}$ - скорость поступательного движения полюса

ω - угловая скорость тела

$$V_{MA} = \omega \cdot MA,$$
$$\overline{V_{MA}} \perp MA$$
$$\overline{V_M} = \overline{V_A} + \overline{V_{MA}}$$

Мгновенный центр скоростей (МЦС).

Покажем на рисунке распределение скоростей, из эпюры скоростей видно, что в теле существует точка (P), скорость которой в данный момент времени равно нулю $\overline{V}_{MA} = -\overline{V}_A$.



Мгновенный центр скоростей (МЦС – точка *P*) - точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю $\overline{V_P} = 0$.

МЦС плоской фигуры находится на перпендикуляре к направлению скорости полюса $\overline{V_A}$ на расстоянии, которое равняется $\frac{V_A}{\omega}$.

МЦС рассматривается **в качестве полюса.**

1. Скорость произвольной точки тела, которая принадлежит плоской фигуре, равняется ее вращательной скорости вокруг мгновенного центра скоростей:

$$\overline{V_A} = \overline{V_{AP}} \ ,$$

Модуль скорости произвольной точки A равняется произведению угловой скорости тела на длину отрезка от точки до МЦС

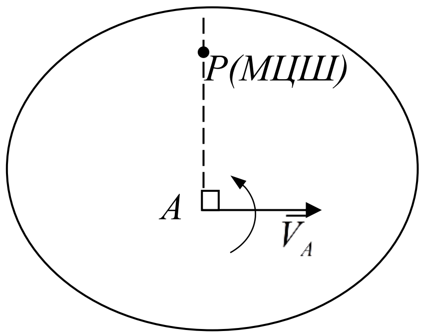
$$V_A = \omega \cdot AP$$

Вектор $\overline{V_A}$ направлен перпендикулярно к отрезку от точки до МЦС в направлении вращения тела: $\overline{V_A} \perp AP$.

2. Модули скоростей точек тела пропорциональны их расстояниям до МЦС.

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \varpi$$

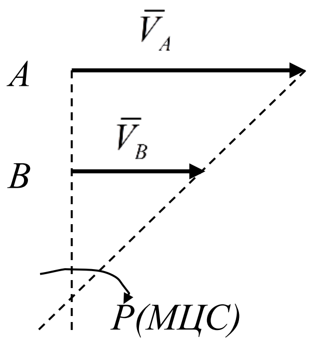
Случаи определения мгновенного центра скоростей.

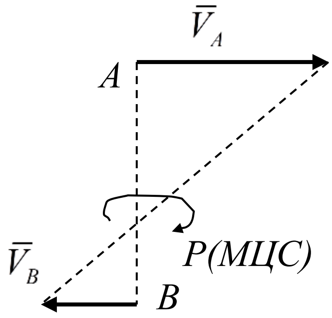


1. Если известны скорость одной точки тела $\overline{V_A}$, угловая скорость вращения тела $\overline{\varpi}$, то для нахождения МЦС (P) необходимо повернуть вектор $\overline{V_A}$ в сторону вращения на 90^0 и на найденном луче отложить отрезок AP, который равняется:

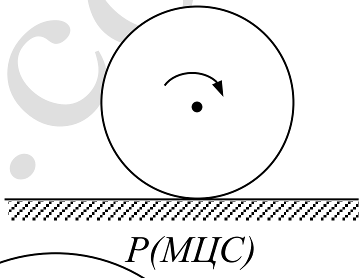
$$AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

2. Если скорости двух точек тела параллельны и перпендикулярны прямой, которая проходит через эти точки, то МЦС находится в точке пересечения этой прямой и прямой, которая соединяет концы векторов скоростей





3. Если известны направления скоростей двух точек тела и их направления не параллельны, то МЦС находится в точке P пересечения перпендикуляров, проведенных к скоростям в этих точках.

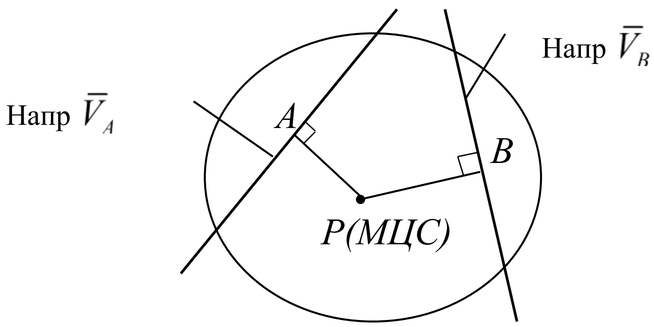


В случаях **2** и **3** возможные исключения

(мгновенно поступательное движение или мгновенный покой).

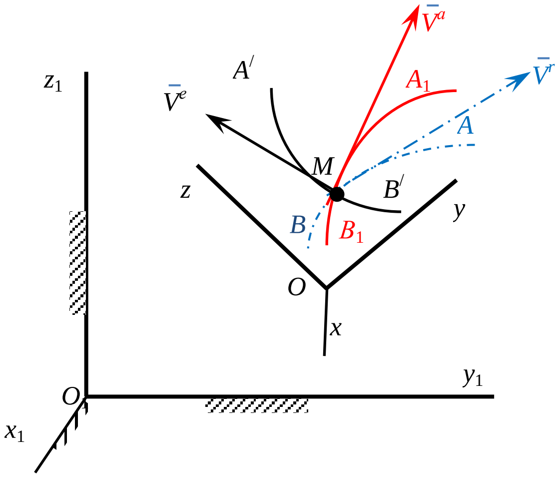
4. Если колесо катится по недвижимой поверхности без скольжения, то МЦС (P) находится в точке соприкосновения колеса с недвижимой поверхностью.

Плоскопараллельное движение можно считать сложным движением



Сложное движение точки

Сложным движением точки называется такое движение, при котором точка одновременно принимает участие в нескольких движениях.



$(O_1x_1y_1z_1)$ – неподвижная (абсолютная) система отсчета

$(Oxyz)$ – подвижная (относительная) система отсчета

Точка M движется относительно двух систем отсчета.

AB – траектория точки относительно подвижной системы $(Oxyz)$.

A_1B_1 - траектория точки относительно неподвижной системы $(O_1x_1y_1\,z_1)$.

$A^/B^/$ - траектория точки вместе с подвижной системой (переносящей средой) относительно неподвижной системы отсчета

Относительным движением называется движение точки относительно подвижной системы отсчета.

AB – относительная траектория (траектория движения точки в ее относительном движении).

$\bar{V}^r$ – относительная скорость точки (скорость по отношению к подвижной системе отсчета, направленная по касательной к соответствующей относительной траектории AB в направлении движения).

$\bar{a}^r$ – относительное ускорение (ускорение точки в относительном движении).

Переносным движением называется движение, которое создает подвижная система (переносящая среда) отсчета вместе с точкой относительно неподвижной системы отсчета.

$A^/B^/$ – переносная траектория (траектория движения точки в ее переносном движении).

$\bar{V}^e$ – переносная скорость (скорость точки вместе с подвижной системой по отношению к неподвижной системе отсчета, направленная по касательной к соответствующей переносной траектории $A^/B^/$ в направлении движения).

$\bar{a}^e$ – переносное ускорение (ускорение точки вместе с подвижной системой по отношению к недвижимой системе отсчета).

Абсолютным движением называется движение точки относительно недвижимой системы отсчета.

A_1B_1 – абсолютная траектория (траектория движения точки относительно неподвижной системы отсчета).

$\bar{V}^a$ – абсолютная скорость (скорость точки по отношению к недвижимой системе отсчета, направленная по касательной к соответствующей абсолютной траектории A_1B_1 в направлении движения).

$\bar{a}^a$ – абсолютное ускорение (ускорение точки в абсолютном движении).

Вывод: Абсолютное движение точки является сложным движением, т.к. состоит из относительного и переносного движений.

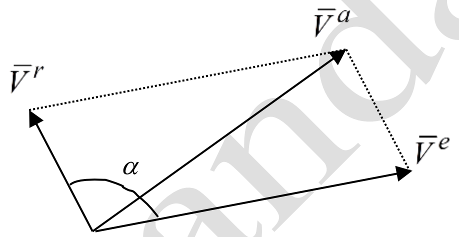
Определение скоростей точки.

При сложном движении абсолютная скорость точки равняется геометрической сумме ее относительной и переносной скоростей.

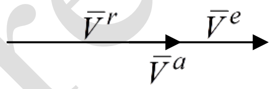
$$\boxed{\bar{V}^a = \bar{V}^r + \bar{V}^e}$$

Модуль абсолютной скорости:

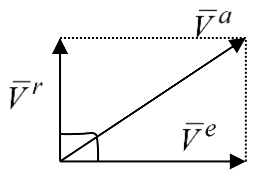
$$V^a = \sqrt{\left(V^r\right)^2 + \left(V^e\right)^2 + 2 \cdot V^r \cdot V^e \cdot cos\alpha}$$



Если $\alpha = 0$ $\quad V^A = V^B + V^П$



Если $\alpha = 90^O$ $V^A = \sqrt{(V^B)^2 + (V^П)^2}$



Определение ускорений точки.

Абсолютное ускорение точки равняется геометрической сумме трех векторов: относительного ускорения $\bar{a}^r$, характеризующего изменение относительной скорости в относительном движении; переносного ускорения $\bar{a}^e$, характеризующего изменение переносной скорости точки в переносном движении, и ускорения Кориолиса $\bar{a}^c$, характеризующего изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости в относительном движении.

$$\boxed{\bar{a}^a = \bar{a}^e + \bar{a}^r + \bar{a}^c}$$

.

Ускорением Кориолиса точки называется двойное векторное произведение угловой скорости переносящей среды и относительной скорости точки.

$$\boxed{\bar{a}^c = 2\bar{\omega} \times \bar{V}^r}$$

Свойства ускорения Кориолиса

Модуль ускорения Кориолиса определяется, как удвоенное векторное произведению угловой скорости переносного движения ω и величины относительной скорости точки V^r:

$$a^c = 2 \cdot \omega \cdot V^r \cdot \sin\alpha$$

Вектор ускорения Кориолиса направлен перпендикулярно плоскости, которая проходит через векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{V}^r$, в том направлении, откуда кратчайшее наложение этих векторов видно против часовой стрелки.

Если векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{V}^r$ взаимно перпендикулярны, направление ускорения Кориолиса определяют по *правилу Жуковского*:

Ускорение Кориолиса направлено так, как вектор относительной скорости точки, повернутый на 90^0 в направлении переносного вращения.

Ускорение Кориолиса равняется нулю, когда:

1 Переносящая среда движется поступательно или имеет место моментальная остановка вращения переносящей среды (или изменение направления движения) ($\bar{\omega}$ = 0);

2 Относительная скорость точки $\bar{V}^r = 0$ в данный момент времени равна нулю (относительный мгновенный покой).

3 Относительная скорость точки $\bar{V}^r$ в данный момент времени параллельна угловой скорости $\bar{\omega}$ переносящей среды.

ДИНАМИКА

Динамика - это раздел теоретической механики, в котором изучаются законы движения материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Основные законы динамики

(законы Галилея-Ньютона).

1. <u>Закон инерции</u> (I закон Галилея).

Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до того времени, пока приложенные силы не изменят это состояние.

Инертность - способность тела сохранять скорость своего движения неизменной, т.е. сохранять полученное ранее механическое движение.

Движение, которое совершает точка при отсутствии сил, называется **движением по инерции**.

Инерционными системами отсчета (условно неподвижными) называют системы отсчета, относительно которых происходит движение тел с течением времени и выполняется закон инерции.

2. <u>Закон пропорциональности силы и ускорения</u>
(основной закон динамики).

Ускорение материальной точки пропорционально приложенной силе и имеет одинаковое с ней направление.

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

Количественной мерой инертности материальной точки или тела при поступательном движении является ее **масса (**m). Единица измерения массы 1 кг.

Мерой инертности тела при вращательном движении является **момент инерции** J_Z.

Момент инерции тела относительно оси J_Z (осевой момент инерции) – скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний i до оси:

$$J_Z = \sum_{n=1}^{k}(m_n \cdot i_n^2) \ ,$$

где i - **радиус инерции** тела или точки тела - расстояние от точки до оси вращения.

Единицей измерения момента инерции считают (кг·м^2).

3. <u>Закон равенства действия и противодействия</u>.

Каждому действия соответствует равное по модулю и противоположное по направлению противодействие.

Динамика точки

Дифференциальные уравнения свободной материальной точки.

Свободная материальная точка М известной массы m, движется под действием системы сил $\{\overline{F_1}, \overline{F_2}, ... \overline{F_n}\}$, равнодействующая системы $\overline{F} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}$.

Ускорения, которое придает система сил точке, является суммарным вектором $\overline{a} = \sum_{n=1}^{k} \overline{a_n}$, направленным по вектору равнодействующей.

Основное уравнение динамики для системы сил:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_n}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{n=1}^{k} F_{nx}$$

$$m \cdot \ddot{y} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{n=1}^{k} F_{ny}$$

$$m \cdot \ddot{z} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{n=1}^{k} F_{nz}$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ - проекции ускорения $\overline{a}$ на координатные оси,

$F_{1X}, F_{1Y}, F_{1Z}, F_{2X}, F_{2Y}, F_{2z} .... F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}$ - проекции сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ... \overline{F_n}$ на координатные оси.

Две задачи динамики точки.

Первая задача динамики (прямая).

Дано: масса точки m и уравнение ее движения $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$,

Определить модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.

Решение первой задачи динамики проводится методом двойного <u>дифференцирования</u> уравнений движения по времени.

Вторая задача динамики (обратная, основная).

Дано масса точки m, силы, действующие на точку, а также начальное положение (X_0, Y_0, Z_0) и начальная скорость ($\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0$),

Определить закон движения $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$

Решение второй задачи динамики осуществляется методом интегрирования (двойного по времени) дифференциальных уравнений при известных начальных условиях.

Динамика твердого тела

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение и движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения остальных.

Материальное тело рассматривается, как система материальных точек (частиц), которые образуют это тело.

Классификация сил, действующих на механическую систему.

Внешними $\overline{F}_n^e$ называются такие силы, которые действуют на точки или тела механической системы со стороны точек или тел, которые не принадлежат данной системе.

Внутренними $\overline{F}_n^i$**,** называют такие силы, которые действуют на точки или тела механической системы со стороны точек или тел той же системы, т.е. с которыми точки или тела данной системы взаимодействуют между собой.

Внешние и внутренние силы системы, в свою очередь могут быть активными и реактивными.

Свойства внутренних сил.

1) Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю

$$\sum_{n=1}^{k} \overline{F_n^i} = 0$$

2) Сумма моментов (главный вектор) всех внутренних сил системы относительно какого-нибудь центра или оси равняется нулю

$$\sum_{n=1}^{k} \overline{M_O}(\overline{F_n^i}) = 0$$

Дифференциальные уравнения движения механической системы.

Система n - материальных точек M_1, M_2,..M_n, масса каждой точки соответственно m_n, находится под действием приложенных к точкам внешних и внутренних сил. Равнодействующие сил соответственно $\overline{F}_n^e$ и $\overline{F}_n^i$.

Основное уравнение динамики для каждой точки

$$m\overline{a_n} = m_n \frac{d^2\overline{r_n}}{dt^2} = \overline{F_n^e} + \overline{F_n^i}$$

Для механической системы n - материальных точек будет получено n - **дифференциальных уравнений движения системы в векторном виде**

$$m_1\overline{a_1} = m_1 \frac{d^2\overline{r_1}}{dt^2} = \overline{F_1^e} + \overline{F_1^i}$$

$$m_2\overline{a_2} = m_2 \frac{d^2\overline{r_2}}{dt^2} = \overline{F_2^e} + \overline{F_2^i}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$m_n\overline{a_n} = m_n \frac{d^2\overline{r_n}}{dt^2} = \overline{F_n^e} + \overline{F_n^i}$$

Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс механической системы.

Масса системы равняется алгебраической сумме масс всех точек или тел системы

$$M = \sum_{n=1}^{k} m_n ,$$

где M - масса механической системы,
m_n - масса n - точки системы.

В однородном поле тяжести, для которого $\overline{g} = const$, вес любой частицы тела пропорционален его массе. Поэтому распределение масс в теле можно определить по положению его **центра тяжести** – геометрической точки С (X_C, Y_C, Z_C), называемой **центром масс** или **центром инерции** механической системы:

$$X_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot x_n}{m},$$

$$Y_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot y_n}{m},$$

$$Z_c = \frac{\sum_{n=1}^{k} m_n \cdot z_n}{m}$$

Теорема: центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Выводы:

Механическую систему или твердое тело можно рассматривать как материальную точку в зависимости от характера ее движения, а не от ее размеров.

Внутренние силы не учитываются теоремой о движении центра масс.

Теорема о движении центра масс не характеризует вращательное движение механической системы, а только поступательное.

Теорема об изменении количества движения.

Количество движения материальной точки – векторная величина $(m \cdot \overline{V})$, равная произведению массы точки на вектор ее скорости.

Единицей измерения количества движения является (кг·м/с).

Количество движения механической системы – векторная величина $\overline{K}$, равная геометрической сумме (главному вектору) количества движения всех точек системы.

$$\overline{Q} = \sum_{n=1}^{k} m_n \cdot \overline{V_n}$$

или **количество движения системы** равняется произведению массы всей системы на скорость ее центра масс

$$\overline{Q} = M \cdot \overline{V_C}$$

Когда тело (или система) движется так, что ее центр масс остается неподвижным $\overline{V_C} = 0$, то количество движения тела равно нулю $\overline{Q} = 0$ (например, вращение тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела).

Если движение тела сложное, то $\overline{Q}$ не будет характеризовать вращательную часть движения при вращении вокруг центра масс. Т.е., *количество движения* $\overline{Q}$ *характеризует только поступательное движение системы* (вместе с центром масс).

Импульс силы характеризует действие силы за некоторый промежуток времени.

Импульс $\overline{S}$ силы $\overline{F}$ **за конечный промежуток времени** t_1 определяется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов

$$\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{F} \cdot dt$$

Проекции импульса силы на оси координат:

$$S_X = \int_0^{t_1} F_X \cdot dt\,, \quad S_Y = \int_0^{t_1} F_Y \cdot dt\,, \quad S_Z = \int_0^{t_1} F_Z \cdot dt$$

Единица измерения импульса силы ($\frac{кг \cdot м}{с}$).

Теорема об изменении количества движения материальной точки (в дифференциальной форме):

Производная по времени от количества движения материальной точки равна геометрической сумме действующих на точку сил.

$$\frac{d(m\overline{V})}{dt} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F_n}$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки (в интегральной форме):

Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке за этот промежуток времени.

$$m\overline{V_1} - m\overline{V_0} = \sum_{n=1}^{k} \overline{S_n}$$

Теорема об изменении количества движения механической системы
(в дифференциальной форме):

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{n=1}^{k} \overline{F^e{}_n}$$

Теорема об изменении количества движения механической системы
(в интегральной форме):

Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равняется геометрической сумме импульсов внешних сил, действующих на систему, за тот же промежуток времени.

$$\overline{Q_1} - \overline{Q_0} = \sum_{n=1}^{k} \overline{S^e{}_n}$$

Закон сохранения количества движения системы.

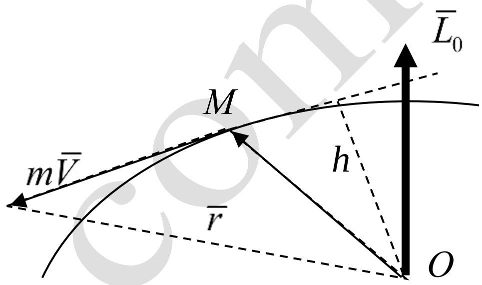
1. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равняется нулю, то вектор количества движения системы будет постоянным по направлению и по модулю.

2. Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь произвольную ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось является величиной постоянной.

Законы сохранения свидетельствуют, что внутренние силы не могут изменить суммарное количество движения системы.

Теорема об изменении момента количества движения.

Момент количества движения точки М относительно центра О – это вектор $\overline{L_O}$, направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор количества движения ($m\overline{V}$) и центр О в ту сторону, откуда поворот вектора ($m\overline{V}$) относительно центра О виден против часовой стрелки и равный:



$$\overline{L_O} = \overline{r} \times \overline{mV}$$

Модуль вектора $\overline{L_O}$ равняется

$$L_O = m \cdot V \cdot h \ ,$$

где h - плечо от центра О к вектору ($m\overline{V}$).

Момент количества движения L_Z **точки М относительно оси** OZ равняется произведению проекции вектора ($m\overline{V}$) на плоскость перпендикулярную оси OZ, на плечо этой проекции относительно точки О пересечения оси с плоскостью.

$$L_Z = \pm mV_{np}h$$

где mV_{np} - проекция вектора $m\overline{V}$ на плоскость (XY), h - плечо

Аналитическое выражение моментов количества движения точки относительно осей координат:

$$L_X = y \cdot mV_Z - z \cdot mV_y, \quad L_Y = z \cdot mV_X - x \cdot mV_Z, \quad L_Z = x \cdot mV_Y - y \cdot mV_X,$$

где x, y, z - координаты точки М, которая движется;

V_X, V_Y, V_Z - проекции скорости точки на соответствующие координатные оси.

Теорема (относительно центра)

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равняется геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра.

$$\frac{d\overline{L_O}}{dt} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M}_O(\overline{F_n})$$

Теорема (относительно оси).

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой неподвижной оси равняется алгебраической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно этой же оси.

$$\frac{dL_Z}{dt} = \sum_{n=1}^{k} M_Z(\overline{F_n})$$

Законы сохранения момента количества движения.

1. Если линия действия равнодействующей приложенных к материальной точке сил все время проходит через некоторый неподвижный центр, то момент количества движения материальной точки остается постоянным.

2. Если момент равнодействующей приложенных к материальной точке сил относительно некоторой оси все время равняется нулю, то момент количества движения материальной точки относительно этой же оси остается постоянным.

Кинетическим моментом или **главным моментом количества движения** механической системы относительно центра называют вектор, который равняется геометрической сумме моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этого же центра.

$$\overline{L_O} = \sum_{n=1}^{k} \overline{L_{On}} = \sum_{n=1}^{k} (\bar{r}_n \times \overline{m_n V_n})$$

Кинетическим моментом или главным моментом количеств движения механической системы относительно оси называют алгебраическую сумму моментов количеств движения всех материальных точек относительно той же оси

$$L_Z = \sum_{n=1}^{k} L_{nZ}$$

Проекция кинетического момента механической системы относительно центра О на ось, проходящую через этот центр, равняется кинетическому моменту системы относительно этой оси

$$L_Z = L_O \cdot \cos(\overline{L_O}, \bar{k})$$

Теорема об изменении главного момента количества движения системы

(относительно центра) – <u>теорема моментов</u>

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра геометрически равняется главному моменту внешних сил, действующих на эту систему, относительно того же центра.

$$\frac{d\overline{L_O}}{dt} = \sum_{n=1}^{k} \overline{M}_O(\overline{F_n^e}) = \sum_{n=1}^{k} \overline{M_{nO}^e} = \overline{M_O^e}$$

В проекциях на оси координат:

$$\frac{dL_X}{dt} = \sum_{n=1}^{k} M_{nX}^e = M_X^e,$$

$$\frac{dL_Y}{dt} = \sum_{n=1}^{k} M_{nY}^e = M_Y^e,$$

$$\frac{dL_Z}{dt} = \sum_{n=1}^{k} M_{nZ}^e = M_Z^e$$

где L_X, L_Y, L_Z - кинетические моменты механической системы относительно координатных осей;
M_X^e, M_Y^e, M_Z^e - главные моменты внешних сил относительно этих осей.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы (относительно оси).

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой оси равняется главному моменту внешних сил относительно этой же оси.

$$\frac{dL_X}{dt} = M_X^e$$

Теорема моментов имеет большое значение при изучении вращательного движения тел и разрешает не учитывать заведомо неизвестные внутренние силы.

Законы сохранения кинетического момента механической системы.

1. Если главный момент внешних сил относительно некоторого неподвижного центра все время равняется нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра величина постоянная.

2. Если главный момент внешних сил относительно некоторой оси равняется нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой же оси величина постоянная.

Внутренние силы не могут изменить главный момент количества движения системы.

Случай вращающейся системы.

Для вращающейся вокруг неподвижной оси OZ (или оси, проходящей через центр масс) системы, кинетический момент относительно оси вращения равняется произведению момента инерции относительно этой оси на угловую скорость

$$L_Z = J_Z \cdot \omega$$

Дифференциальное уравнение вращательного движения:

$$J_Z \cdot \varepsilon = \sum_{n=1}^{k} M_{nZ}$$

Теорема об изменении кинетической энергии.

Кинетическая энергия это способность тела преодолевать препятствование во время движения.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

$$T = \frac{mV^2}{2}$$

Кинетическая энергия:

– характеризует и поступательное и вращательное движения;
– не зависит от направления движения точек системы и не характеризует изменение этих направлений;
– характеризует действие и внутренних, и внешних сил.

Кинетическая энергия системы равняется сумме кинетических энергий тел составляющих систему

$$T = \sum_{n=1}^{k} T_n$$

Кинетическая энергия **зависит** от вида движения тел системы.

Теорема Кьонига (о кинетической энергии системы).

Кинетическая энергия механической системы равняется сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе системы, и кинетической энергии системы в ее относительном движении относительно центра масс.

$$T = \frac{1}{2}MV_C^2 + \sum_{n=1}^{k}\frac{m_n V_{nr}^2}{2} \quad ,$$

где V_{nr} - относительная скорость точки.

Кинетическая энергия **зависит** от вида движения тел системы.

Определение кинетической энергии твердого тела при разных видах движения движениях.

Кинетическая энергия поступательного движения

$$T = \frac{mV^2}{2}$$

Кинетическая энергия вращательного движения тела равняется половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости:

$$T = \frac{J_Z \cdot \omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия плоскопаралельного движения тела

$$T = \frac{M \cdot V_C^2}{2} + \frac{J_{C_\xi} \cdot \omega^2}{2} \quad ,$$

где $\frac{M \cdot V_C^2}{2}$ - кинетическая энергия тела в поступательном движении вместе с центром масс,

$\frac{J_{C\xi} \cdot \omega^2}{2}$ - кинетическая энергия при вращении тела вокруг подвижной оси C_ξ, проходящей через центр масс,

C_ξ - ось, проходящая через центр масс и перпендикулярная базовой плоскости,

M – масса системы,

V_C - скорость центра масс,

$J_{C\xi}$ - момент инерции тела относительно оси C_ξ,

ω - угловая скорость вращения вокруг оси $C\xi$.

Работа силы.

Работа силы характеризует действие силы на тело при некотором перемещении и определяет *изменение модуля скорости* подвижной точки.

Элементарная работа силы определяется как скалярная величина dA, равная произведению проекции силы F_τ на касательную к траектории, направленную в направлении движения точки, на бесконечно малое перемещение ds точки, направленное вдоль этой касательной.

$$dA = F_\tau \cdot ds$$

$F_\tau = F \cdot \cos\alpha$ - проекция силы $\overline{F}$ на вектор перемещения и скорости. .

Аналитическое выражение элементарной работы:

$$dA = F_X dx + F_Y dy + F_Z dz$$

где F_X, F_Y, F_Z - проекции силы на оси координат,

dx, dy, dz - элементарные перемещения относительно координатных осей.

Работа силы на конечном перемещении M_1M_0 равняется интегралу вдоль этого перемещения от элементарной работы.

$$A_{(M_1M_0)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \cdot ds = \int_{M_0}^{M_1} F \cdot \cos\alpha \cdot ds$$

или

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} (F_X dx + F_Y dy + F_Z dz)$$

Единица измерения работы силы и кинетической энергии 1 (Дж).

Мощность – это величина, определяющая работу силы за единицу времени.

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau \cdot V$$

Единица измерения мощности 1Вт = 1 Дж/с.

Случаи определения работы сил.

1. Работа силы тяжести.

$$A = \pm mgh$$

(+) - тело опускается

(-) - тело поднимается.

2. Работа силы упругости.

$$A = \frac{c}{2}(\Delta l_н^2 - \Delta l_к^2),$$

где l_n - длина недеформированной пружины

l_k - длина деформированной пружины

c - коэффициент жесткости

3. Работа силы трения, если величина трения постоянная

$$A = -F_{тр} \cdot s = -f \cdot N \cdot s,$$

где s - перемещения.

4. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу.

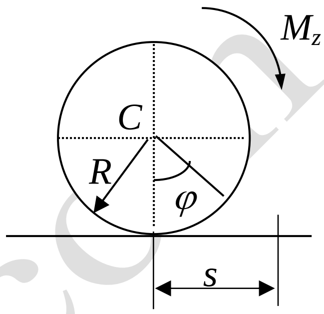
$A = -M_Z \cdot \varphi$,

где

$M_Z = N \cdot \delta$,

где M_Z - момент вращения (момент сопротивления) тела вокруг оси OZ, проходящей через центр масс,

δ - коэффициент трения качения,



$\varphi = \frac{s}{R}$ - угловое перемещение тела,

s - линейное перемещение

Теорема об изменении кинетической энергии.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равняется алгебраической сумме робот всех действующих на точку сил на этом же перемещении.

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_O M_1)}$$

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равняется алгебраической сумме робот внутренних и внешних сил, действующих на материальные точки системы на том же перемещении.

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{k} A_n^e + \sum_{n=1}^{k} A_n^i$$

Теорема об изменении кинетической энергии неизменной механической системы:

Изменение кинетической энергии неизменной системы на некотором перемещении равняется сумме робот внешних сил, действующих на точки системы на том же перемещении.

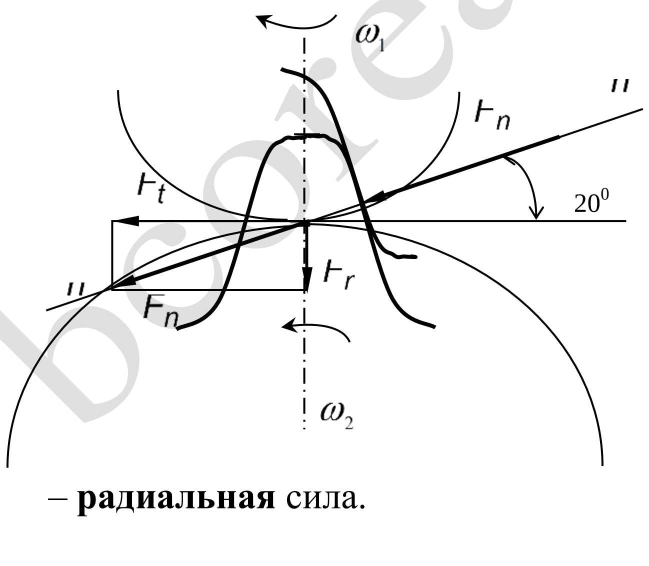
$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{k} A_n^e$$

Силы, действующие в машинах

Силы и пары сил (моменты), которые приложены к механизму или машине, можно разделить на группы:

1. Движущие силы и моменты, совершающие положительную работу (приложенные к ведущим звеньям).
2. Силы и моменты сопротивления, совершающие отрицательную работу:
   – полезного сопротивления (совершают требуемую от машины работу и приложены к ведомым звеньям),
   – силы сопротивления.
3. Силы тяжести и силы упругости пружин (как положительная, так и отрицательная работа).
4. Силы и моменты, приложенные к корпусу или стойке извне (реакция фундамента и т.п.), которые не совершают работу.
5. Силы взаимодействия между звеньями, действующие в кинематических парах.
6. Силы инерции звеньев, обусловленные массой и движением звеньев с ускорением, могут осуществлять положительную, отрицательную работу и не совершать работы.

Силы в зацеплении прямозубой цилиндрической передачи



F_n – нормальная сила, направленная по линии зацепления как общей нормали к поверхностям зубьев (реальная сила).

Силы, действующие в зацеплении, принято прикладывать в полюсе зацепления. Силу F_n переносят в полюс и раскладывают на составляющие.

F_t – **окружная** сила,

F_r – **радиальная** сила.

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1},$$

$$F_r = F_t \cdot tg\alpha,$$

$$F_n = \frac{F_t}{cos\,\alpha}.$$

Трение в механизмах и машинах

При исследовании физических основ явления трения различают внутреннее и внешнее трения.

Внутреннее трение – явление, происходящие в твердых, жидких и газообразных телах, при их деформации и приводящее к необратимому рассеиванию энергии.

Внешнее трение – явление сопротивления относительному перемещению, возникающее между двумя телами в зонах соприкосновения поверхностей по касательным к ним и сопровождающееся диссипацией энергии.

Сила сопротивления при относительном перемещении одного тела по поверхности другого под действием внешней силы, тангенциально направленная к общей границе между этими телами, называется **сила трения**.

Материал, который вводится на поверхность трения для уменьшения силы трения и интенсивности износа, называется **смазывающим материалом**. Подведение смазывающего материала к поверхности трения навивают **смазкой**.

В зависимости от характера относительного движения различают:

- трение скольжения,
- трение качения.

В зависимости от состояния поверхности трение скольжения бывает:

- сухое - тела непосредственно касаются друг друга (без смазывания),
- граничное - тела разделены смазочным маслом, но не по всей поверхности,
- жидкостное - тела разделены объемом смазочного материала.

Трение скольжения

Трение скольжения имеет место при относительном движении двух тел, скорости которых в точке контакта различны.

Оно обусловлено двумя факторами:

- шероховатостью поверхностей,
- силами межмолекулярного взаимодействия между двумя телами.

Сила трения определяется по формуле:

$$F_{TP} = N \cdot f + A,$$

где f – коэффициент трения скольжения,

N – нормальная составляющая реакции,

A – постоянная величина, учитывающая силы межмолекулярного взаимодействия.

Как правило, этой величиной пренебрегают. Тогда:

$$F_{TP} = Nf$$

$$f = \frac{F_{TP}}{N}$$

Коэффициент трения f зависит от:

- материала,
- чистоты обработки поверхности,
- смазки,
- относительной скорости (уменьшается с увеличением скорости),
- удельного давления (увеличивается с увеличением нагрузки).

Трение в плоском ползуне

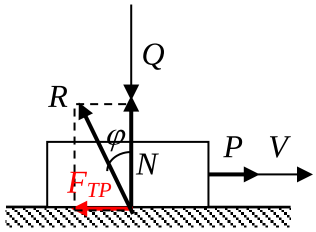
При равномерном прямолинейном относительном движении должны выполняться условия:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P = F_{TP}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = Q,$$

где P – движущая сила,

Q – сила прижатия.



Действие сил N и F_{TP} можно заменить равнодействующей R. Угол между общей нормальной реакцией N и полной реакцией R называется **угол трения** φ.

$$tg\varphi = \frac{F_{TP}}{N} = f$$

$$F_{TP} = Q \cdot tg\varphi = Q \cdot f$$

Для равномерного прямолинейного движения:

$$F_{TP} = N \cdot f = Q \cdot f$$

Для приведения ползуна в движение необходима сила, которая больше силы, обеспечивающей равномерное движение. Предельная сила, соответствующая началу относительного движения, называется **силой трения покоя** F_n.

Коэффициент трения покоя:

$$f_n = \frac{F_n}{N}$$

Коэффициент трения движения:

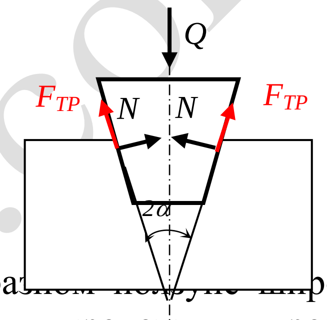
$$f = \frac{F_{TP}}{N}$$

Чаще всего $f_n > f$.

Трение в клинообразном ползуне

Из условия равновесия:

$N = \dfrac{Q}{2\sin\alpha}$.



Сила трения:

$F_{_{TP}} = 2Nf = \dfrac{Q \cdot f}{\sin\alpha} = \dfrac{f}{\sin\alpha} Q = f_{np} \cdot Q$,

где f_{np} – приведенный коэффициент трения.

Увеличение коэффициента трения в клинообразном ползуне широко используется в технике (треугольный профиль крепежных резьб, клиноременные передачи и др.).

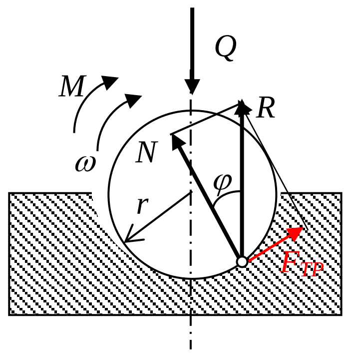
Трение во вращательных парах

Из условия равновесия:

$Q = R$

$M = M_{TP}$,

где M_{TP} – момент трения.



Сила трения:

$$F = fN = fR\cos\varphi = fQ\cos\varphi$$

Момент трения:

$$M_{TP} = F_{TP} r = fQr\cos\varphi = Qr\sin\varphi$$

Когда углы трения малые можно учитывать, что $\sin\varphi \approx tg\varphi$ (при $\varphi \le 10^0$ $f\cos\varphi = tg\varphi\cos\varphi = \sin\varphi$).

Момент трения во вращательной паре:

$$M_{TP} = Qrf',$$

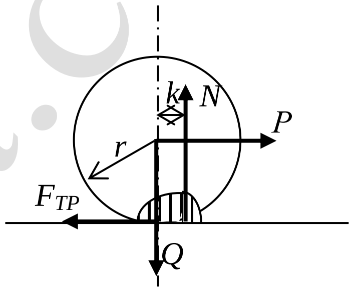
где f'– коэффициент трения во вращательной пари, определяется экспериментально для различных условий работы пар, материала, состояния поверхностей и т.п. (для неприработанных поверхностей $f' = \frac{3}{2} f$, для приработанных – $f' = \frac{4}{3} f$).

Трение качения

Трение качения возникает в высших кинематических парах, скорости которых в точка соприкосновения одинаковы по величине и по направлению. Оно обусловлено:

- деформацией реальных тел,
- явлением перемещений на поверхности тел,
- явлением межмолекулярного взаимодействия,
- наличием относительного скольжения.

В зоне контакта неподвижого цилиндра и плоскости возникает местная деформация контактного сжатия, напряжение распределяются по эллиптическому закону и линия действия равнодействующей N этих напряжений совпадает с линией действия силы нагрузки на цилиндр Q. При перекатывании цилиндра распределение нагрузки становится несимметричным с максимумом, смещенным в сторону движения. Равнодействующая N смещается на величину k – плечо силы трения качения, которая еще назвается **коэффициентом трения качения** и имеет размерность длины (см). При качении необходимо преодолеть момент трения качения:



$$M_{TP} = Qk.$$

Под действием внешней силы P цилиндр равномерно перекатывается без скольжения. На цилиндр действуют силы P и F_{TP} ($P = F_{TP}$). Из условия равновесия:

$$P \cdot r = Q \cdot k,$$

$$P = \frac{k}{r} Q.$$

Под действием силы P цилиндр может при одних условиях перекатываться, в других скользить. Если

$\frac{k}{r} < f$ – чистое качение

$\frac{k}{r} = f$ – и качение, и скольжение

$\frac{k}{r} > f$ – чистое скольжение.

Негативными последствиями трения в механизмах являются:

– износ – изменение размеров и зазоров в кинематических парах;
– повышенный нагрев;
– снижение КПД.

Коэффициент полезного действия

КПД учитывает механические потери:

$$\eta = \frac{A_{КО}}{A_{РС}},$$

$A_{ПС}$ – работа сил полезного сопротивления,
$A_{ДС}$ – работа движущих сил,

$$A_{ДС} = A_{ПС} + A_{ВС},$$

$A_{ВС}$ – работа сил вредного сопротивления.
Коэффициент потерь:

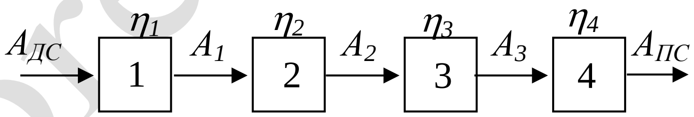
$$\varphi = \frac{A_{ВС}}{A_{ДС}}$$

$$\eta = 1 - \varphi$$

1. Машина движется и выполняет полезную работу при $1 > \eta > 0$
2. Работа в холостую: $\eta = 0$
3. Машина находится в заклиненном стане: $\eta < 0$

Элементы машины могут соединяться последовательно, параллельно и смешанно.

Последовательное соединение



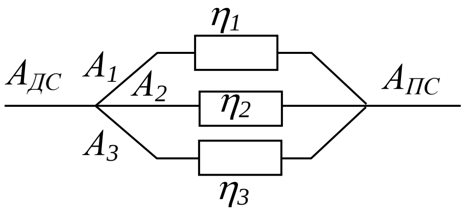
$$\eta = \frac{A_{ПС}}{A_{ДС}},\ \eta_1 = \frac{A_1}{A_{ДС}}, \eta_2 = \frac{A_2}{A_1},\ \eta_3 = \frac{A_3}{A_2},\ \eta_4 = \frac{A_3}{A_{ПС}}$$

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 = \frac{A_1}{A_{ДС}} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_{ПС}}{A_3} = \frac{A_{ПС}}{A_{ДС}}$$

При последовательном соединении механизмов общий КПД меньше с наименьшего КПД отдельного механизма

Механизм последовательно включать не рекомендуется.

Параллельное соединение:



$$\eta = \frac{A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

При параллельном соединении механизмов общий КПД больше наименьшего и меньше наибольшего КПД отдельного механизма.

ДЕТАЛИ МАШИН

Механические передачи

Механическая передача – механизм, превращающий кинематические (n) и энергетические параметры (P) двигателя в необходимые параметры движения рабочих органов машин и предназначенный для согласования режима работы двигателя с режимом работы исполнительных органов.

Двигатели работают в узком диапазоне частот вращения и моментов, рабочие машины - в широком.

Типы механических передач

- зубчатые передачи (цилиндрические, конические),
- винтовые (винтовые, червячные, гипоидные),
- с гибкими элементами (ременные, цепные),
- фрикционные (за счет трения, применяются при плохих условиях работы).

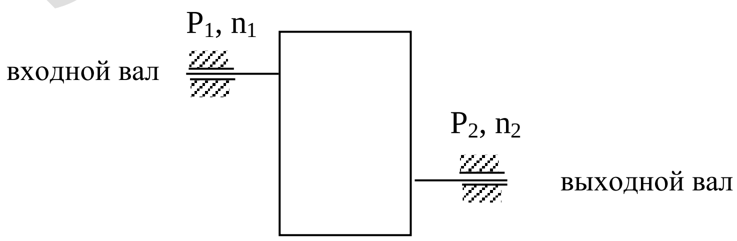
По способу передачи движения:

- движение с вала на вал передается за счет сил трения (фрикционные, ременные, червячные),
- движение передается зацеплением (зубчатые, цепные, винтовые, с зубчатыми ремнями, червячные).

Основные и производные параметры механические передач

Независимо от типа и конструкции в любой механической передаче можно выделить два вала, называемые в направлении передачи мощности ***входным*** (ведущим) и ***выходным*** (ведомым)

Основные параметры – параметры входного и выходного валов – мощность *P (кВт)* и частота вращения *n (мин*$^{-1}$*)*.



Производные параметры:

- передаточное число

$$u = \frac{n_1}{n_2};$$

- коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P_2}{P_1};$$

– угловая скорость вращения вала, *рад/с*

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

При известной мощности и частоте вращения на валу можно определить крутящий момент, $H{\cdot}$м или $\frac{кВт}{мин^{-1}}$.

$$T = \frac{P}{\omega};$$

$$T = 9550\frac{P}{n}.$$

В зависимости от соотношения параметров входного и выходного валов передачи делятся:

– на **редукторы** (понижающие передачи) – от входного вала к выходному уменьшают частоту вращения ($n_1 > n_2$) и увеличивают крутящий момент ($T_1 < T_2$); передаточное число передачи $u > 1$;

– на **мультипликаторы** (повышающие передачи) – от входного вала к выходному увеличивают частоту вращения ($n_1 < n_2$) и уменьшают крутящий момент ($T_1 > T_2$); передаточное число передачи $u < 1$.

Зубчатые передачи.

Преимущества и недостатки.

Преимущества:

1. Компактность.
2. Возможность передавать большие мощности (до 1000 квт).
3. Наибольшие скорости вращения (до 30 м/с).
4. Постоянство передаточного отношения.
5. Наибольший ККД (0,98..0,99 в одной ступени).

Недостатки:

1. сложность передачи движения на значительные расстояния;
2. жесткость передачи;
3. шум во время работы;
4. необходимость в смазке.

Классификация.

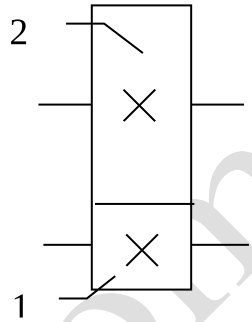
По расположению валов:

– с параллельными осями (цилиндрические с внутренним и внешним зацеплениям),

– с пересекающимися осями (конические),

– с перекрестными осями (винту, гипоидные, червячные, колесо-рельс).

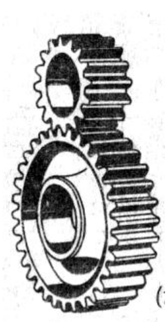
Пары зубчатых колес образовывают степень (модуль одинаковый для обеих колес).



Ведущее колесо – шестерня 1.
Ведомое – колесо

Для ЗП характерное значение передаточного числа u в одной ступени. Поэтому для реализации больших передаточных чисел чаще всего используют многоступенчатые зубчатые редукторы. Они размещаются в отдельном корпусе и выполняются как самостоятельные изделия. Серийное изготовление на заводах разрешает получать широкую номенклатуру редукторов, которые применяются в поводах общего машиностроительного назначения.

Цилиндрические передачи



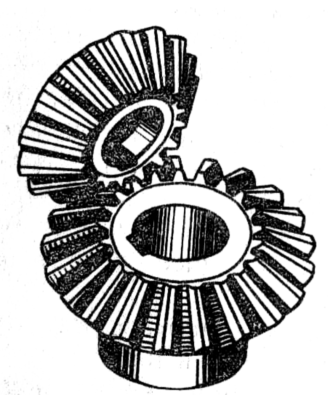
Цилиндрические зубчатые колеса бывают с внешним и внутренним зацеплением. В зависимости от угла наклона зубьев выполняют прямозубые и косозубые колеса. Косозубые цилиндрические передачи нарезаются тем же режущим инструментом, на тех же станках, по такой же технологии, что и прямозубые. При этом заготовку поворачивают на угол β, поэтому зубья располагаются не по образующей делительного цилиндра, а под углом к ней β.

С увеличением угла β повышается прочность косозубых передач. Вследствие наклона зубьев, получается как-бы колесо больших размеров, или при той же нагрузке уменьшаются габариты передачи. Поэтому в современных передачах косозубые колеса получили преобладающее распространение.

В отличие от прямых, в которых нагрузка на зубья прикладывается мгновенно, косые зубья входят у зацепление не сразу по всей длине, а постепенно. Косозубое колесо не имеет зоны однопарного зацепления. Это определяет плавность работы косозубого зацепления, снижение шума и дополнительных динамических нагрузок по сравнению с прямозубым зацеплением.

Однако, в косозубых передачах появляется дополнительная осевая сила, направленная вдоль оси вала и создающая дополнительную нагрузку на опоры. Для уменьшения этой силы ограничивают угол наклона $\beta = 8...20^0$, применяют редукторы с раздвоенной ступенью. Этот недостаток исключен в **шевронной** передаче.

Конические передачи

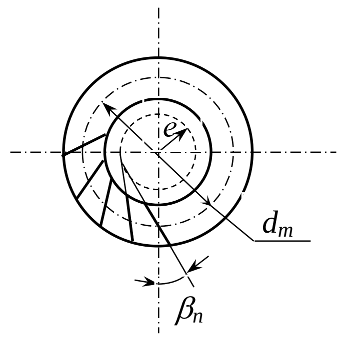


Конические зубчатые передачи применяют в тех случаях, когда оси валов пересекаются под некоторым углом Σ, чаще всего $\Sigma = 90^0$.

Конические передачи более сложны в изготовлении и монтаже, чем цилиндрические, вследствие следующих причин:

1) Для нарезания конических колес требуются специальные станки.
2) Необходимо выдерживать допуски на углы δ_1 и δ_2.
3) При монтаже нужно обеспечивать совпадение вершин конусов.
4) Сложнее выполнять колеса той же точности, что и цилиндрические.
5) Пересечение валов усложняет расположение опор вследствие того, что одно из конических колес располагается, как правило, консольно.
6) В коническом зацеплении действуют осевые силы, усложняющие конструкцию опор.

Нагрузочная способность конической прямозубой передачи составляет приблизительно 85% цилиндрической.

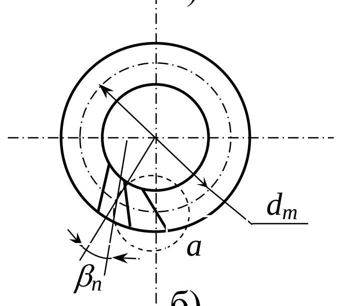


а)

Конические передачи получили широкое распространение вследствие того, что из условия компоновки необходимо располагать валы под углом.

Для повышения нагрузочной способности конических колес применяют колеса с непрямыми зубьями.

На практике наиболее распространены конические колеса с тангенциальными (а) и круговыми (б) зубьями.

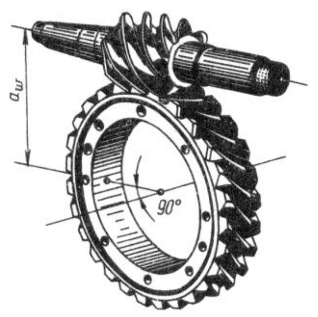


б)

Тангенциальные зубья направлены по касательной к некоторой воображаемой окружности радиусом e и составляют с образующей конуса угол $\beta_n = 25..30^0$;

Круговые зубья располагаются по дуге окружности a, по которой движется инструмент при нарезании зубьев.

Червячные передачи



Червячные передачи применяют для передачи движения между перекрещивающимися осями, угол между которыми, как правило, составляет 90^0. Движение в червячных передачах передается по принципу винтовой пары или по принципу наклоненной плоскости.

Преимущества:

- большие передаточные отношения;
- плавность и бесшумность работы;
- высокая кинематическая точность;
- самоторможение.

Недостатки:

- низкий ККД;
- износ, заедание;
- использование дорогих материалов;

требования к высокой точности сборки.

В червячной передаче, в отличие от зубчатой, окружные скорости на червяке и на колесе не совпадают. Они направлены под углом 90^0 и отличаются по значению. При относительном движении начальные цилиндры скользят. Большое скольжение является причиной снижения ККД, повышенного износа и заедания.

$$\boxed{\bar{V}_1 \neq \bar{V}_2} \Rightarrow \boxed{\text{наличие скольжения}} \Rightarrow \boxed{\text{наличие трения}} \Rightarrow \begin{array}{c} \boxed{\text{повышенный износ}} \\ \boxed{\text{сниженный КПД}} \\ \boxed{\text{нагрев}} \end{array}$$

КПД червячной передачи $\eta \approx 0,7\ldots0,9$, что ниже КПД зубчатых передач $\eta \approx 0,97\ldots0,99$.

Для снижения износа применяют специальные антифрикционные пары материалов: червяк – сталь, венец червячного колеса − бронза, реже из латунь или чугун.

Для охлаждения червячных передач увеличивают площадь охлаждения корпуса, используют вентиляторы или дополнительную систему охлаждения.

Методы изготовления зубчатых колес

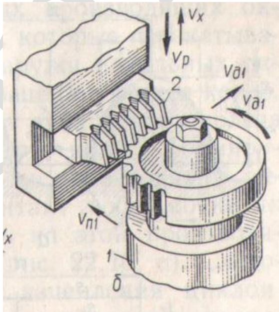
Существуют три метода изготовления зубчатых колес:

- копирование,
- накатка,
- обкатка.

При изготовлении **методом копирования** используются пальцевая или дисковая модульная фреза, профиль которой соответствует профилю впадин зубчатого колеса. Вращаясь, фреза перемещается в направлении боковой образующей зуба. За каждый шаг фрезы вдоль оси колеса нарезается одна впадина. После этого колесо поворачивается на угол $\tau = \dfrac{2\pi}{z}$. Потом процесс повторяется. Этот метод малопродуктивен и нуждается в большом количестве режущего инструмента. К методам копирования также принадлежат: отливка, штампование, протягивание, строгание.

Метод накатки – зубчатое инструментальное колесо накатывает зубья колеса, материал которого достаточно эластичный (в холодном или горячем состоянии). Используется для мелкомодульных колес ($m \leq 5$)

При методе обкатки для нарезания колес используется инструментальная рейка. Преимущество в том, что одним и тем же инструментом можно изготовить колеса с любым количеством зубьев общего модуля.



Метод обкатки (долбяком, рейкой, червячной фрезой) заключается в том, что режущему инструменту и заготовке придается то относительное движение, которое имели бы зубчатые колеса, находясь в зацеплении.

Если при изготовлении зубчатого колеса средняя (делительная) линия режущего инструмента касается делительной окружности заготовки колеса, то нарезаются колеса без смещения. Если средняя линия рейки смещается относительно центра заготовки нарезаются колеса со смещением (положительное (от центра) - увеличиваются размеры колеса, толщина зубца, зуб упрочняется; отрицательное (к центру) - используется для уменьшения межосевого расстояния, уменьшения габаритов, при этом возможно подрезание зубьев).

Передачи с гибкими звеньями

Для передачи движения между сравнительно далеко расположенными друг от друга валами применяют механизмы, в которых усилие от ведущего звена к ведомому передается с помощью гибких звеньев. В качестве гибких звеньев применяются: ремни, шнуры, канаты разных профилей, провод, стальная лента, цепи различных конструкций.

Передачи с гибкими звеньями могут обеспечивать постоянное и переменное передаточное отношения со ступенчатым или плавным изменением его величины.

Для сохранности постоянства натяжения гибких звеньев в механизмах применяются натяжные устройства: натяжные ролики и пружины, противовесы и т.п.

Виды передач

1 По способу соединения гибкого звена с остальными:
   – фрикционные;

– с непосредственным соединением;
– с зацеплением.

2 По взаимному расположению валов и направлению их вращения:
– открытые;
– перекрестные;
– полуперекрестные.

Ременные передачи

Ременная передача состоит из двух шкивов, закрепленных на валах, и ремня, охватывающего эти шкивы. Нагрузки передается за счет сил трения, возникающих между шкивами и ремнем вследствие натяжения последнего.

В зависимости от формы поперечного перереза ремня различают передачи:
– плоскоременную;
– клиноременную;
– круглоременную.

Наиболее широкое применение получили клиноременные передачи, вследствие увеличения тяговой способности вследствие повышения зацепление со шкивом (приблизительно в 3 раза). Наибольшее преимущество наблюдается в передачах с зубчатыми (поликлиновами) ремнями.

Преимущества:

– возможность передачи движения на значительные расстояния (до 15 м и более);
– плавность и бесшумность работы;
– защита механизмов от колебаний нагрузки вследствие упругости ремня;
– защита механизмов от перегрузки за счет возможного проскальзывания ремня;
– простота конструкции и эксплуатации (передача не требует смазки).

Недостатки:

– повышенные габариты (при равных условиях диаметры шкивов в 5 раз больше диаметров зубчатых колес);
– непостоянство передаточного отношения вследствие проскальзывание ремня;
– повышенная нагрузка на валы и их опоры, связанное с большим предварительным натяжением ремня (в 2-3 раза больше, чем у зубчатых передач);
– низкая долговечность ремней (1000-5000 часов).

В ременных передачах имеют место два вида скольжения:

– упругое скольжение, существующее при любой нагрузке;
– буксование, возникающее при перегрузке.

Упругое скольжение является причиной непостоянства передаточного отношения и увеличения затрат на трение.

Критерии трудоспособности и расчета ременных передач:

1) тяговая способность, обусловленная силой трения между ремнем и шкивом;
2) долговечность ремня, который ограничивается разрушением ремня от усталости.

Для обеспечения тяговой способности необходимо предварительное натяжение ремня, которое на практике приводит к снижению долговечности ремня, зависящей также от характера и частоты цикла изменения напряжений (частоты пробегов ремня).

Цепные передачи

Цепная передача основана на принципе зацепления цепи и звездочек.

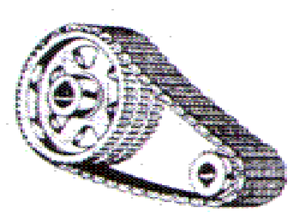
Цепная передача состоит из

- ведущей звездочки;
- ведомой звездочки;
- цепи, которая охватывает звездочки и зацепляется за них зубьями;
- натяжных устройств;
- смазывающих устройств;
- ограждения.

Преимущества по сравнению с ременной передачей:

1) Большая нагрузочная способность;

2) Отсутствие скольжения и буксование, обеспечивающее постоянство передаточного отношения (среднего за оборот) и возможность работы при кратковременных перегрузках.



Принцип зацепления не требует предварительного натяжения цепи. Цепные передачи могут работать при меньших межосевых расстояниях и при больших передаточных отношениях.

Недостатки:

Звенья располагаются на звездочке не по окружности, а по многоугольнику. Отсюда:

1) износ шарниров цепи,
2) шум и дополнительные динамические нагрузки,
3) необходимость обеспечения смазки.

Область применения:

1) при значительных межосевых расстояниях (при скоростях меньше 15-20 м/с, до 25 м/с применяют пластинчатые цепи (набор пластин с двумя зубообразными выступами, принцип внутреннего зацепления);
2) при передаче от одного ведущего вала нескольким ведомым,
3) когда зубчатые передачи неприменимы и ременные ненадежны.

По сравнению с ременными передачами более шумные, а редукторах применяют на тихоходных ступенях.

Типы цепных передач

По типу применяемых цепей:

- роликовая,
- втулочная (легкая, но большой износ),
- роликовтулочная (тяжелая, меньше износ),
- зубчатые пластинчатые (плавность работы).

Основной причиной потери работоспособности цепных передач является износ шарниров цепи. Срок службы цепи увеличивается при увеличении длины цепи, увеличении числа зубьев ведущей звездочки. Однако, увеличение числа зубьев ведущей звездочки приводи к повышению вероятности потери зацепления. При уменьшении числа зубьев ведущей звездочки увеличиваются динамические нагрузки, удары, износ цепи.

Валы

Назначение и классификация

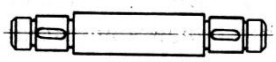
Вращающиеся детали механических передач крепят на валах и осях, обеспечивающих постоянное положение оси вращения этих деталей.

Оси не передают крутящий момент и работают только на изгиб. Ось может быть подвижной и неподвижной. **Валы** передают крутящий момент и потому работают на изгиб и кручение.

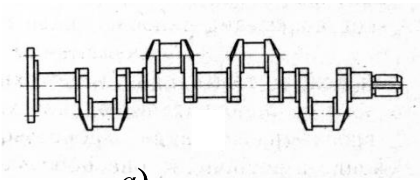
В зависимости от формы продольной оси валы разделяют на:

- прямые (а),
- коленчатые (б),

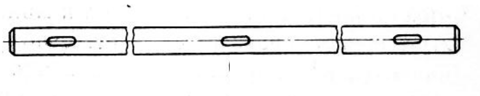
– гибкие (*г*).



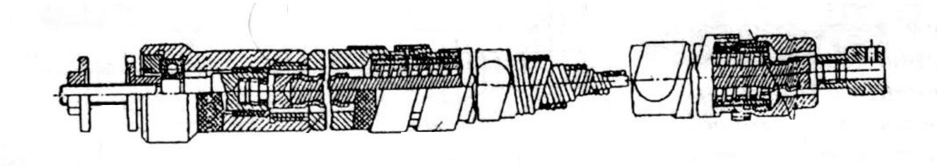
а



а)



в



г

По конструкции различают валы:

– гладкие (*в*)
– ступенчатые (*а*).

Ступенчатые валы изготавливают для фиксации деталей в осевом направлении, а также для монтажа деталей при посадке с натягом.

Для уменьшения массы, а также для подведения смазки проектируют пустотелые валы.

Задачами расчета валов является обеспечения усталостной прочности, ограничение деформаций изгиба и кручения, возможных поперечных и крутильных колебаний. Расчет и конструирования валов – взаимосвязанные процессы, поэтому расчет валов состоит из двух этапов: проектного и проверочного расчета.

Проектный расчет

При проектном расчете валов, как правило, известны нагрузки и размеры основных деталей, расположенных на валу. Нужно выбрать материал и определить размеры вала.

Порядок проведения проектного расчета.

1 Предварительно оценивают средний диаметр вала из расчета только на кручение при заниженных допускаемых напряжениях.

Из условия прочности на кручение

$$\tau = \frac{T}{W_\rho} = \frac{T}{0,2d^3} \le [\tau],$$

определяют диаметр вала

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]}}.$$

Как правило, принимают $\tau = 20...30$ *МПа* для трансмиссионных валов; $\tau = 12...15$ *МПа* для редукторных валов.

Диаметр входного конца вала редуктора можно принять равным или близким к диаметру выходного вала электродвигателя.

2. Разрабатывают конструкцию вала.

3. Выполняют проверочный расчет вала.

Проверочный расчет валов

Порядок проведения проверочного расчета валов.

1. Выбирают расчетную схему и определяют расчетные нагрузки.

2. Находят опасные сечения, обусловленные наибольшим изгибающим моментом, ослабленные концентраторами напряжений: галтель, виточка, шпоночный паз, резьба и т.п.

3. Проводят расчет на статическую прочность. Например, при использовании энергетической теории прочности эквивалентные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_k^2} \le [\sigma]_{\max},$$

где допускаемые напряжения:

$$[\sigma]_{\max} = 0,6\ldots0,8\sigma_T,$$

σ_T – предел текучести,

напряжение изгиба: $\sigma_u = \dfrac{M}{W_z}$

напряжение кручения: $\tau = \dfrac{T}{W_\rho}$.

Иногда сначала рассчитывают приведенный момент

$$M_{зв.} = \sqrt{M_з^2 + T_2^2} \quad ,$$

а потом эквивалентные напряжения

$$\sigma = \frac{M_{зв.}}{0,1 \cdot d^3}.$$

4. Проводят расчет на выносливость по запасу сопротивления усталости.

5. Проверяют жесткость вала по условиям жесткости при изгибе и при кручении.

6. Проводят расчет на колебание из условия предупреждения вращения в критической зоне.

Подшипники

Подшипники служат опорами для валов и осей, они поддерживают их в пространстве, обеспечивая возможность вращения, воспринимают радиальные и осевые нагрузки. От качества подшипников в значительной степени зависят работоспособность и долговечность машин. Во избежание снижения КПД механизма, потери в подшипниках должны быть минимальными.

Подшипники классифицируют по виду трения и воспринимаемой нагрузке.

По виду трения:

– **подшипники скольжения**, в которых опорный участок вала скользит по поверхности подшипника;
– **подшипники качения**, в которых трение скольжения заменяют трением качения с помощью установления шариков или роликов между опорными поверхностями подшипника и вала.

По воспринимаемой нагрузке:

– **радиальные**, воспринимают радиальные нагрузки;
– **упорные,** воспринимают осевые нагрузки;
– **радиально-упорные**, воспринимают радиальные и осевые нагрузки.

Подшипники скольжения

Подшипники скольжения - это опоры вращающихся деталей, работающие в условиях скольжения поверхности вала по поверхности подшипника.

Основным элементом подшипника скольжения является вкладыш с тонким слоем антифрикционного материала на опорной поверхности.

Область применения подшипников скольжения в современном машиностроении сократилась в связи с распространением подшипников качения. Однако значение подшипников скольжения в современной технике не снизилось. Их применяют очень широко, и в целом ряде конструкций они незаменимы. К таким подшипникам принадлежат:

1) разъемные подшипники, необходимые по условиям сборки, например для коленчатых валов;

2) высокоскоростные подшипники ($V > 30$ *м/с*), работающие в условиях, при которых долговечность подшипников качения резко сокращается (вибрации, шум, большие инерционные нагрузки на тела качения);

3) подшипники прецизионных машин, от которых необходимо особо точное направление валов и возможность регулирования зазоров;

4) подшипники, работающие в особых условиях (вода, агрессивная среда и т.п.), в которых подшипники качения нетрудоспособны из-за коррозии;

5) подшипники дешевых тихоходных механизмов и некоторые другие.

Основные причины выхода из порядка подшипников скольжения:

- выплавление вкладыша
- износ вкладыша и цапфы
- усталостное выкрашивание (при действии переменных нагрузок)
- хрупкое разрушение (при больших кратковременных перегрузках ударного характера)

В зависимости от режима работы подшипника в нем может быть **полужидкостное** или **жидкостное** трения. Наиболее предпочтительный режим жидкостного трения. При жидкостном трении рабочие поверхности вала и вкладыша разделенные слоем смазочного масла.

Подшипники качения

Применение подшипников качения позволяет заменить трение скольжения трением качения, которое менее существенно зависит от смазки (условный коэффициент трения близкий к коэффициенту жидкостного трения $f \approx 0{,}0015...0{,}006$). При этом упрощается система смазки и обслуживание подшипника.

Классификация подшипников качения:

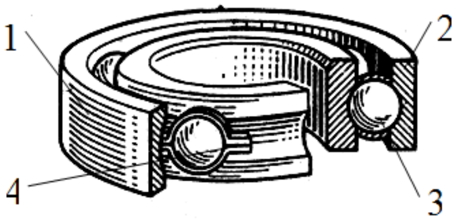
По форме тел качения:

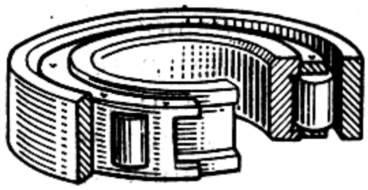
- шариковые;
- роликовые.

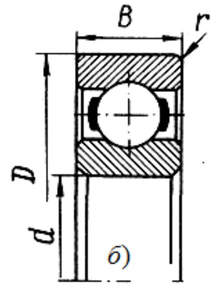
По направлению воспринимаемой нагрузки:

- радиальные,
- упорные,
- радиально-упорные,
- упорно-радиальные.

Подшипники качения состоят из внутреннего 1 (а) и внешнего 2 колец с дорожками качения, тел качения 3 (шариков или роликов), сепараторов 4, которые разделяют и направляют тела качения.







Недостатки подшипников качения:

– сложность разъемных конструкций,
– сравнительно большие радиальные габариты,
– ограниченная быстроходность,
– низкая работоспособность при вибрационных, ударных нагрузках и в агрессивных средах.
–

Основные причины потери трудоспособности подшипников качения

– **выкрашивание от усталости**, наблюдается в подшипниках после продолжительного времени их работы в нормальных условиях;

– **износ**, наблюдается при недостаточной защите от абразивных частиц (пыли и грязи);

– **разрушение сепараторов**, дает значительный процент выхода из строя подшипников качения, особенно быстроходных;

– **раскалывание колец и тел качения**, связано с ударными и вибрационными нагрузками, неправильным монтажом, вызывающим перекосы колец, заклинивание и т.п.;

– **остаточные деформации** на беговых дорожках и виде лунок и вмятин, наблюдаются в важконагруженных тихоходных подшипниках.

Расчет подшипников качения

Расчет подшипников качения базируется на двух критериях:

1 Расчет на ресурс (долговечность) по усталостному выкрашиванию.

2 Расчет на статическую грузоподъемность по окончательным деформациям.

При проектировании подшипники подбирают из числа стандартных. Различают подбор подшипников по динамической грузоподъемности для предотвращения разрушения от усталости (выкрашивания) (при $n \geq 10$ *мин*$^{-1}$) и по статической грузоподъемности для предотвращения остаточных деформаций.

Расчет на ресурс

Условие выбора за динамической грузоподъемности

$$C_{потріб} \leq C_{паспорт}.$$

Паспортная динамическая грузоподъемность – это такая постоянная нагрузка, которую подшипник может выдержать на протяжении 1 млн. оборотов без выявления признаков усталости не менее чем у 90% из определенного количества подшипников (приведена в каталоге).

Динамическая грузоподъемность

$$C = P\sqrt[p]{\frac{L}{a_1 a_2}}$$

где L – ресурс подшипника, млн. оборотов;

P – эквивалентная нагрузка;

p =3 (для шариковых), $p \approx 3{,}33$ (для роликовых);

a_1 – коэффициент надежности;

a_2 – обобщенный коэффициент совместного влияния качества металла и условий эксплуатации;.

Эквивалентная нагрузка для радиальных и радиально-упорных подшипников – это такая условная постоянная нагрузка, при приложении которой к подшипнику, в котором вращается внутреннее кольцо, обеспечивается такая же долговечность, которую подшипник имеет при действительных условиях нагрузки и вращения:

$$P_r = \left(XVF_r + YF_a\right)K_б K_T$$

где F_r, F_a – радиальная и осевая нагрузки;

X, Y – коэффициенты радиальной и осевой нагрузки;

V – коэффициент вращения, зависит от того, какое кольцо вращается;

$K_б$ – коэффициент безопасности, учитывающий характер нагрузки ;

K_T – температурный коэффициент.

Соединение деталей машин

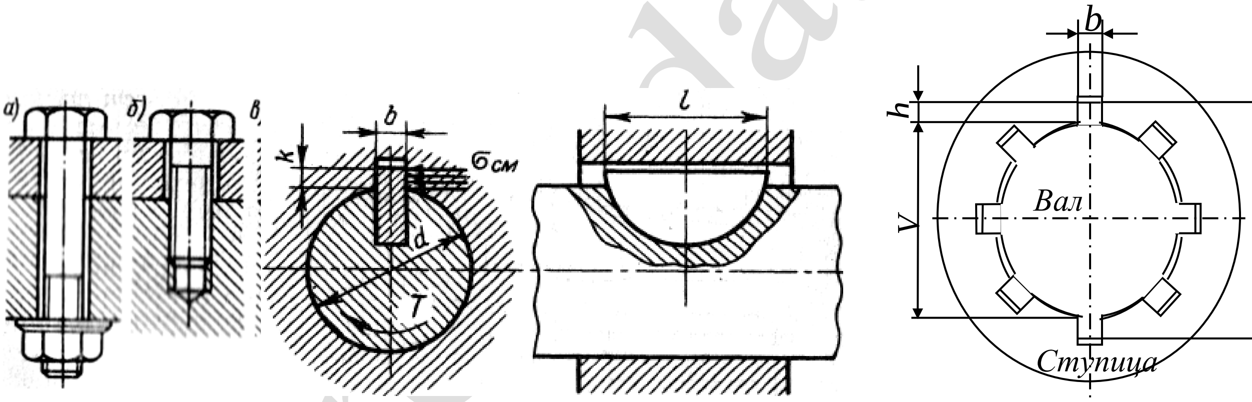
Виды разъемных и неразъемных соединений

Детали, входящие в конструкцию технического средства, соединяются между собой соответствующими способами, называемыми **связями**. Связи могут быть **подвижные** и **неподвижные**. Наличие подвижных связей в механизмах и машинах (кинематических пар, например, шарниров, зубчатых зацеплений) обусловлено их кинематическими схемами. Создание неподвижных связей определяется необходимостью разделения общей конструкции технического средства на узлы и детали для упрощения производства, облегчения сборки, ремонта и транспортировки. Неподвижные связи называются **соединения**.

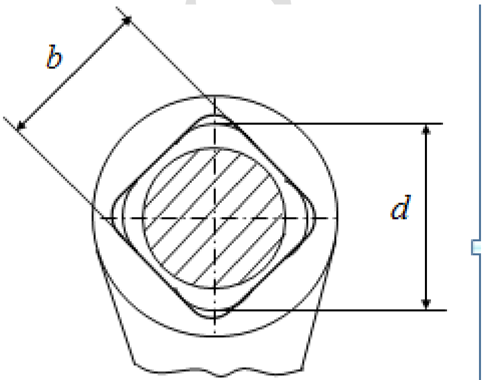
Соединения являются важными элементами машиностроительных конструкций. Опыт эксплуатации транспортных технических средств показал, что большое количество отказов в их работе связано с неудовлетворительным качеством соединений. Поэтому основным критерием работоспособности соединений является прочность.

Виды соединений
- **разъемные**
- **неразъемные.**

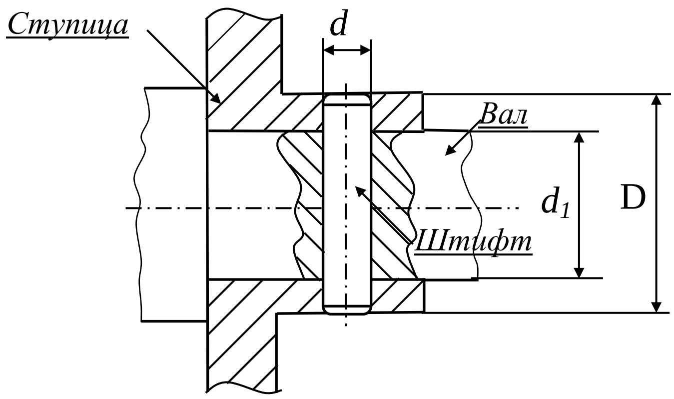
К разъемным соединениям, которые могут разбираться без разрушения соединяемых деталей, принадлежат:
- резьбовые (а);
- шпоночные (б);
- шлицевые (в);
- профильные (г);
- штифтовые (д);
- клиновые.



а) б) в)



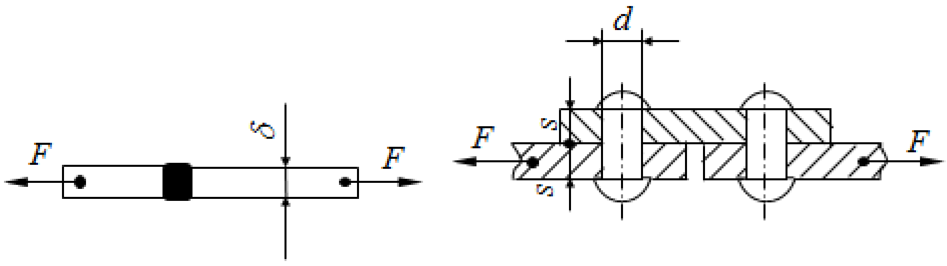
г)



д)

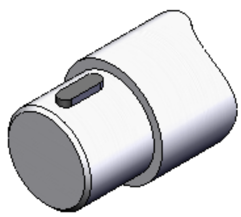
К неразъемным соединениям, которые не могут разбираться без разрушения соединяемых деталей или их поверхностей, принадлежат:

- сварные (а);
- заклепочные (б);
- соединение с натягом;
- паянные;
- клеевые.



а *б*

Шпоночные соединения



Шпоночные соединения служат для закрепления деталей на осях и валах. Такими деталями являются шкивы, зубчатые колеса, муфты, маховики, кулачки и т.д. Соединения нагружаются в основном вращающим моментом

Шпоночное соединение осуществляется с помощью специальной детали – **шпонки**, которая закладывается в соответствующие пазы поверхностей соединяемых деталей. Оно обеспечивает неподвижное соединение деталей для передачи крутящего момента.

Преимущества

- простота и надежность конструкции,
- удобство сборки и разборки,
- невысокая стоимость.

Недостатки

- ослабление сечений соединяемых деталей;
- наличие концентраторов напряжений;
- часто прочность соединения ниже прочности вала и ступицы;
- трудность обеспечения взаимозаменяемости;

Типы шпонок

– клиновая врезная (ГОСТ 8791-68), создает напряженное состояние на верхней и нижней гранях шпонки и передает крутящий момент за счет сил трения на них (*а*);

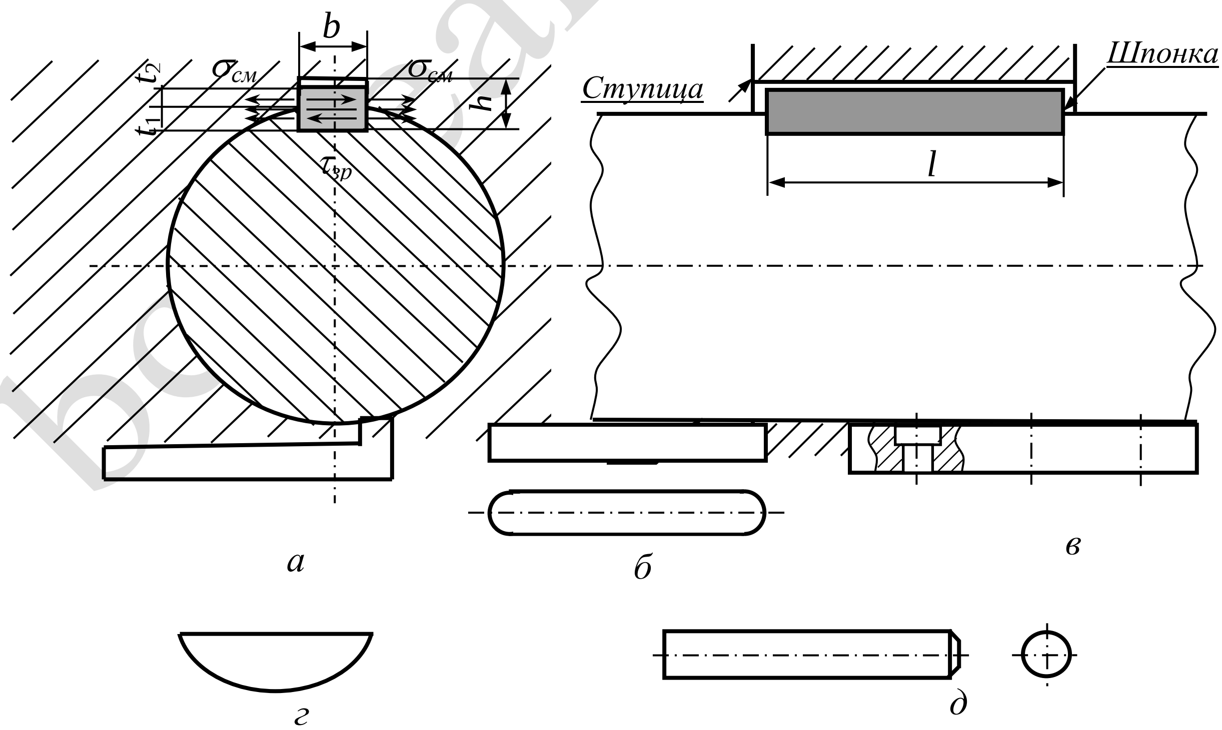
– призматическая обычная со скругленными концами (ГОСТ 8789-68), воспринимает нагрузку боковыми гранями (*б)*;
– призматическая направляющая врезная с закреплением на валу (ГОСТ 8790-68), допускает перемещение ступицы вдоль оси вала (*в)*;
– сегментная (ГОСТ 8794-68) (*г)*;
– круглая (не стандартизированная) (*д)*.

Чаще всего применяются призматические шпонки. Соединение призматическими шпонками ненапряженное. Оно требует изготовления вала и отверстия с большой точностью.

Расчет шпоночного соединения

Момент передается с вала на ступицу боковыми узкими гранями шпонки. При этом на них возникают напряжения смятия $\sigma_{см,}$ а в продольном сечении шпонки — напряжения среза $\tau_{ср}$

Для упрощения расчета допускают, что шпонка врезана в вал на половину своей высоты, напряжение $\sigma_{см}$ распределяются равномерно по



высоте и длине шпонки, плечо равнодействующей этих напряжений равняется $\frac{d}{2}$. Рассматривая равновесие вала или ступицы при этих допущениях, получаем условия прочности.

Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{4T}{hl_p d} \le [\sigma_{см}],$$

Условие прочности на срез:

$$\tau_{ср} = \frac{2T}{bl_p d} \le [\tau_{ср}].$$

где $[\sigma_{см}]$, $[\tau_{ср}]$ – допускаемые напряжения смятия и среза.

У стандартных шпонок размеры *b* и *h* подобраны таким образом, что нагрузку соединения ограничивают не напряжениями среза; а напряжениями смятия. Поэтому при расчетах обычно используют только условие прочности на смятие.

Шпонку выбирают в зависимости от диаметра вала по ГОСТ 23360-78, определяют размеры поперечного сечения шпонки *b* и *h*. Из условия прочности на смятие определяют расчетную длину шпонки *l*, округляют до стандартного размера, согласовывая ее с размером ступицы.

Параллельность граней призматической шпонки позволяет осуществлять подвижное соединение ступицы с валом в осевом направлении (коробки скоростей и др.).

Стандартные шпонки изготовляют из чистотянутых стальных прутьев углеродистой по ГОСТ 380-71 и ГОСТ 1050-74 или легированной стали с пределом прочности $\sigma_в$ не ниже 500 *МПа*. Значение допускаемых напряжений зависит от:

- режима работы,
- прочности материала вала и втулки,
- типа посадки втулки на вал.

Допускаемые напряжения на смятие при стальной ступице для неподвижных соединений при переходных посадках рекомендуют $[\sigma_{см}]$ = 80...150 МПа, при посадках с натягом $[\sigma_{см}]$ = 110...200 МПа; при чугунной ступице принимается $[\sigma_{см}]$ =45...55МПа

Меньшие значения принимают для чугунных ступиц и при резких изменениях нагрузки.

В подвижных (в осевом направлении) соединениях допускаемые напряжения значительно снижают с целью предупреждения задира и ограничения износа. При этом принимают $[\sigma_{см}]$ = 20...30 МПа.

Значение $\left[\tau_{cp}\right]$ зависит от характера нагрузки, при спокойной нагрузке принимается $\left[\tau_{cp}\right]$=120 МПа, при умеренных толчках $\left[\tau_{cp}\right]$=85 МПа, при ударной нагрузке $\left[\tau_{cp}\right]$=50 МПа.

СТАНДАРТИЗАЦИЯ НОРМ, ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТЬ

Взаимозаменяемость – принцип конструирования и изготовления деталей, обеспечивающий возможность сборки и замены при ремонтах независимо изготовленных с заданной точностью деталей и сборочных единиц без дополнительной обработки и припасовки и с сохранением соответствия качеству.

Допуски и посадки

Детали и сборочные единицы будут взаимозаменяемые только в случае, когда их размеры, форма и другие параметры находятся в определенных пределах. Параметры деталей оценивают количественно с помощью размеров.

Размер – это числовое значение линейной величины в выбранных единицах измерения:

– ***номинальный*** – это размер, относительно которого определяются пределы, и который используется для отсчета отклонений (определяется во время конструирования на основе расчетов или по конструктивным соображениям и проставляется на чертежах деталей или соединений, после расчетов округляется до стандартного значения по ГОСТ 6636-69);

– ***действительный*** – размер установленный измерениями с допустимой погрешностью***;***

– ***предельный*** **–** два допустимых размера, т.е. наибольший и наименьший, между которыми должен находиться действительный размер**.**

На чертежах проставляют номинальные размеры, а каждое из двух предельных определяют по отклонением от номинального.

Предельные отклонения – это отклонение от номинального размера, которые проставляются на чертеже.

Различают верхнее и нижнее отклонения:

D – номинальный размер отверстия

$$\varnothing D\begin{pmatrix} ES \\ EI \end{pmatrix}\begin{matrix} \textit{верхнее} \\ \textit{нижнее} \end{matrix}$$

d – номинальный размер вала

$$\varnothing d\begin{pmatrix} es \\ ei \end{pmatrix}\begin{matrix} \textit{верхнее} \\ \textit{нижнее} \end{matrix}$$

Предельные отклонения определяются как алгебраическая разность между предельным и номинальными размерами:

$$ES = D_{\max} - D \qquad es = d_{\max} - d$$

$$EI = D_{\min} - D \qquad ei = d_{\min} - d\,.$$

Отверстие – охватывающий размер.

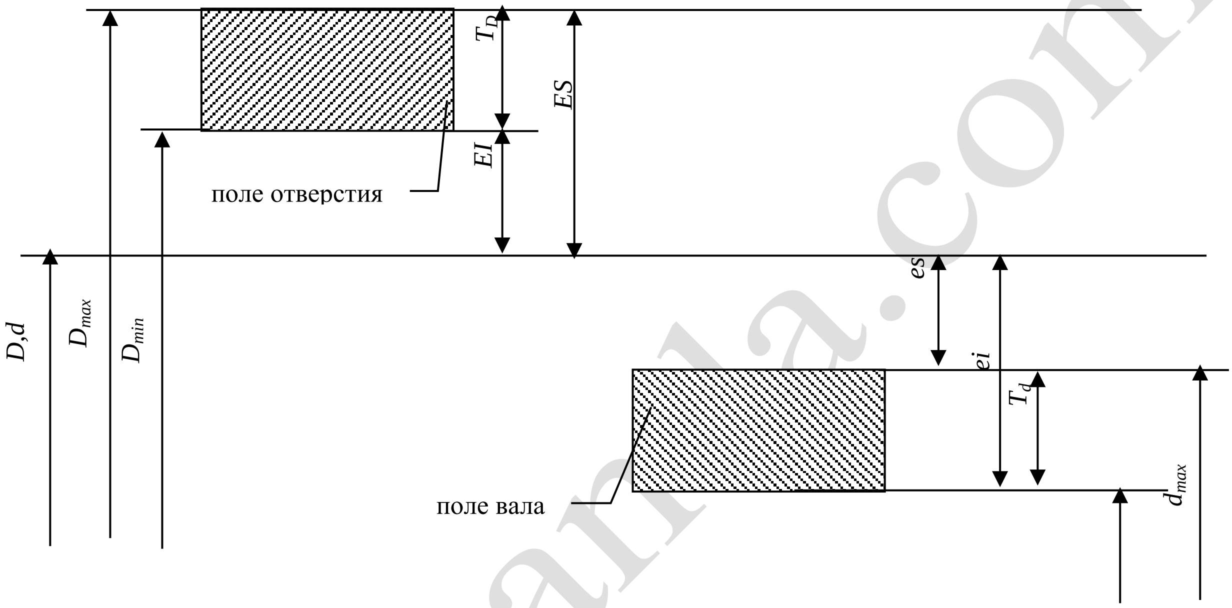
Вал – охватываемый размер.

Разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами или абсолютная величина алгебраической разности между верхним и нижним пределами называется **допуском размера *T***:

отверстия $T_D = D_{\max} - D_{\min} = ES - EI$

вала $T_d = d_{\max} - d_{\min} = es - ei$.

Поле допуска – поле, ограниченное верхним и нижним отклонениями, которое определяется величиной допуска и располагается относительно номинального размера – нулевой линии. Нулевая линия при графическом изображении полей допусков соответствует номинальному размеру.



Единая система допусков и посадок (ЕСДП)

ЕСДП – это совокупность закономерно построенных рядов допусков и посадок, оформленных в виде стандартов, предназначенная для выбора минимально необходимых, но достаточных для практики вариантов допусков и посадок.

ЕСДП охватывает размеры до 3150мм.

Составной частью в ЕСДП входят стандарты:

– ГОСТ 25346-82 «ЕСДП, общие положения...»;

– ГОСТ 25347-82 «ЕСДП, поля допусков и рекомендуемые посадки» (СТ СЭВ 144-75).

Для нормирования различных уровней точности для размеров до 500мм стандартом предусмотренные 19 квалитетов точности:

– *IT*01, *IT*0, *IT*1, *IT*2 – для концевых мер;
– *IT*2 ... *IT*5 – для калибров;
– *IT*5 ... *IT*11 – для сопряженных размеров деталей машин;

– $IT12 \ldots IT1$ – для свободных (несопряженных) размеров.

Допуск размера в ЕСДП образуется соединением основного отклонения и квалитета: $\varnothing 50H7$, $\varnothing 85f8$ и т.п.

Посадка – это характер соединения деталей, которая определяется величиной полученных в ней зазоров или натягов, и которая характеризует свободу перемещения соединенных деталей или сопротивление их взаимному перемещению.

Зазор – это разность между размерами отверстия и вала, если отверстие больше вала.

Натяг – это разность между размерами отверстия и вала, если вал больше отверстия.

Посадка с зазором – это посадка, в которой обеспечивается зазор в соединении.

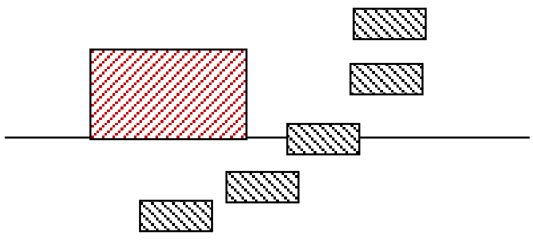
Они предназначены для подвижных и неподвижных соединений. В подвижных соединениях зазор служит для обеспечения свободы движения, размещения слоя смазочного материала, компенсирования температурных деформаций, а также компенсирования отклонений формы и расположение поверхностей, погрешностей сборки и т.п. В неподвижных соединениях посадки с зазором применяются для обеспечения беспрепятственной сборки деталей.

Посадка с натягом – это посадка, при которой обеспечивается натяг соединения. Они используются для неподвижных неразъемных соединений (разъемных ли лишь в отдельных случаях при ремонте) без дополнительного крепления винтами, штифтами, шпонками и т.п.

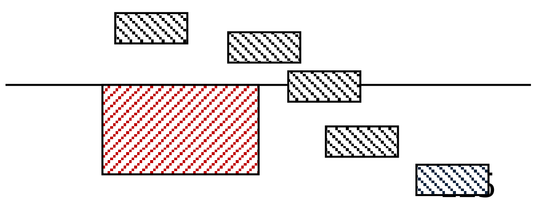
Переходная посадка – это посадка, при которой можно получить как зазор, так и натяг. Они предназначены для неподвижных, но разъемных соединений и обеспечивают хорошее центрирование сопряженных деталей. Для них характерно получение, как небольших зазоров, так и небольших натягов. Их применяют с дополнительным креплением шпонками, штифтами, винтами и т.п., применяют в относительно точных квалитетах (валы 4...7, отверстия 5...8):

В ЕСДП существует:

– система **отверстия** – посадки, в которых зазоры и натяги получаются соединением разных валов с основным отверстием (**основное отверстие** – это отверстие, нижнее отклонение которого равняется 0);



– система **вала** – посадки, в которых зазоры и натяги получаются соединением разных отверстий с основным валом (**основной вал** –



это вал, верхнее отклонение которого равняется 0);

Системе отверстия отдают предпочтение как более экономичной.

При расчетах посадок шпоночных соединений рассматривают две посадки:

шпонка – вал;

шпонка – ступица.

Предельные отклонения для размера по ширине шпонки b принимают по $h9$ (по ГОСТ 253447-82).

Предельные отклонения размеров по ширине паза вала и втулки выбираются по ГОСТ 23360 – 78 в зависимости от типа соединения.

Тип соединения	**Предельные отклонения размеров по ширине**	
	на валу	**во втулке**
свободное (для направляющих шпонок)	*H9*	*D10*
нормальное (для крупносерийного и массового производства)	*N9*	J_s9
плотное (для единичного и серийного производства)	*P9*	*P9*

Размеры шпонок

- по высоте h выбирают по $h11$ (по ГОСТ 253447-82),
- по длине шпонки l по $h14$ (по ГОСТ 253447-82),
- по длине шпоночного паза Н15 (по ГОСТ 253447-82).

Размер глубины паза в валу t_1 и во втулке t_2, а также отклонения этих размеров определяются по ГОСТ 23360-78 и зависят от размеров сечения шпонки.

Отклонение формы и расположение поверхностей

Основой нормирования и количественного отклонения формы и расположение поверхностей является принцип прилегающих прямых, поверхностей и профилей.

Номинальная поверхность – это идеальная поверхность, размеры и форма которой соответствуют заданным номинальным размерам и номинальной форме.

Прилегающая поверхность - поверхность, имеющая форму номинальной поверхности, соприкасающаяся с реальной поверхностью и расположенная вне материала детали так, чтобы отклонение от ее наиболее удаленной точки до реальной поверхности в пределах нормируемого участка имело минимальное значение.

Для измерения отклонений формы прилегающими поверхностями применяются поверхности контрольных плит, поверочных линеек, калибров.

Отклонение формы – это отклонение формы реального элемента от номинальной формы, оцениваемое наибольшим расстоянием от точек реального элемента по нормали до прилегающего элемента.

Допуск формы – это наибольшее значение отклонения формы, т. е наибольшее расстояние от точек реальной поверхности до прилегающей поверхности по нормали.

Отклонение расположения поверхности – это отклонение действительного расположения элемента рассматриваемой поверхности, оси или плоскости симметрии от номинального расположения.

Для оценки точности расположения поверхности назначают базу.

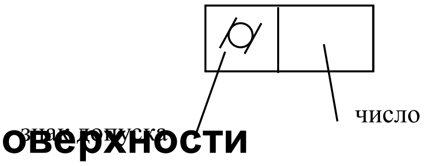
База – это поверхность, ее образующая или точка, определяющая привязку деталей к плоскости или оси, относительно которой задаются допуски расположения. Если базой является поверхность вращения или резьба, то за базу принимается ось.

Допуск расположения – это предел, ограничивающий допустимое значение отклонений расположения поверхностей.

Группа допуска	Виды допуска	Условное обозначение	Примечание
Допуск формы	прямолинейности	–	ограничивает абсолютную величину отклонения
	плоскости	▱	
	круглости	○	ограничивает отклонение в радиусном выражении
	цилиндричности	⌭	
	продольного сечения	=	
Допуск расположения	параллельности	//	ограничивает предельное отклонение от базы
	перпендикулярности	⊥	
	наклона	∠	
	соосности	◎	ограничивает отклонение диаметра (∅T) или в радиус (R÷)
	симметричности	⌯	
	позиционности	⌖	
	пересечение осей	×	
Суммарные допуски форм или расположение	радиальное биение – торцевое биение – биение в заданном направлении	↗	ограничивает суммарное отклонение, которое показывает индикатор при измерениях
	– полное радиальное биение – полное торцевое биение	⌰	
	формы заданного профиля	⌒	ограничивает суммарное отклонение формы или поверхности
	формы заданной поверхности	⌓	

Числовые значения отклонений формы и расположение поверхностей выбирают по ГОСТ 24643-81. Установлено 16 степеней точности формы и расположение поверхностей.

Примеры обозначения на чертеже:



Шероховатость поверхности

Поверхности, полученные обработкой на металлорежущих станках, или иным путем имеют чередующиеся выступы и впадины разной высоты и формы и сравнительно малых размеров по высоте и шагу. Шероховатость поверхности в сочетании с другими характеристиками определяет состояние поверхности и является наряду с точностью формы одной из основных геометрических характеристик качества поверхности

Шероховатость поверхности – это совокупность неровностей поверхности с относительно малыми шагами в пределах базовой длины.

Шероховатость поверхности независимо от материала и способа изготовления можно оценить одним или несколькими параметрами:

R_a – среднее арифметическое отклонение,

R_z – высота неровностей профиля по 10 точкам (5 выступлений и 5 впадин),

R_{max} – наибольшая высота неровностей,

S_{min} – средний шаг неровностей,

S – средний шаг местных выступов,

t_p – относительная опорная длина профиля.

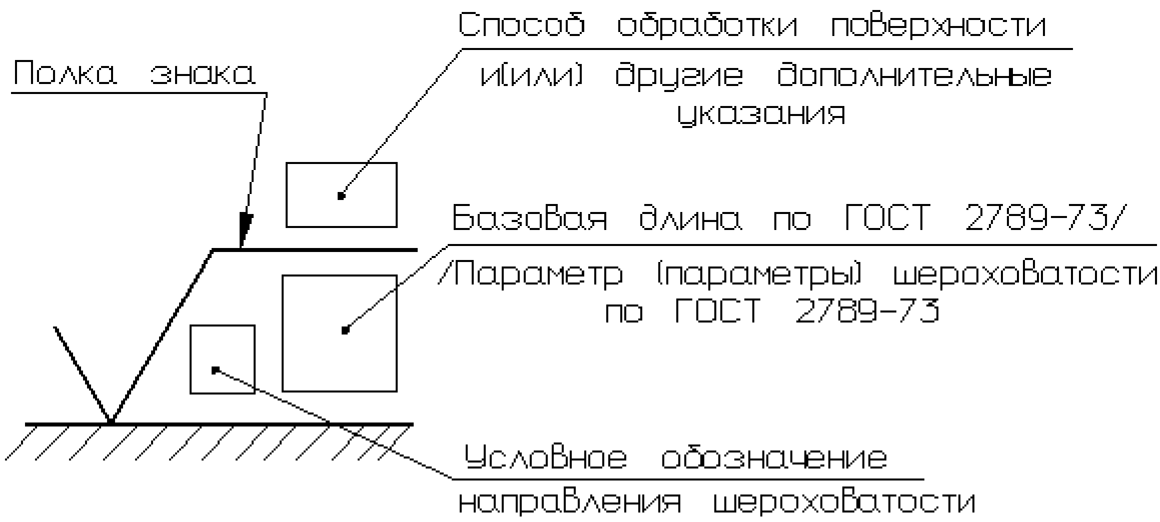
Наиболее полную информацию представляет параметр R_a , он является основным из высотных параметров шероховатости и его назначают на все сопряженные и чисто обработанные несопряженные поверхности деталей.

Чистовые поверхности с малой шероховатостью повышают прочность и коррозионную устойчивость деталей, уменьшают трение срабатывания в сопряженных подвижных деталях. Однако при этом возрастает стоимость обработки поверхностей. Поэтому выбор параметров шероховатости должен быть экономически обоснованным.

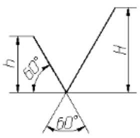
Непосредственной связи между квалитетами точности размеров и параметрами шероховатости не существует, но не допускается высокая точность со значительной шероховатостью поверхностей, поскольку высота неровностей должна быть соизмеримою с допуском на размер. Поверхности деталей, которые предназначены для соединений по стандартным посадкам, должны иметь параметр шероховатости R_a 0,2...3,2 мкм.

Требования к шероховатости поверхности устанавливают путем указания параметра шероховатости (или нескольких параметров), его числового значения (наибольшего, наименьшего, номинального), а также, при необходимости, базовой длины и направления неровностей.

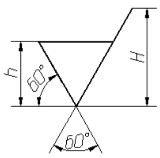
Согласно ГОСТ 2.309-73 (с изменением № 3 2002 г.) шероховатость поверхностей обозначают на чертеже для всех поверхностей детали, которые выполняются по данному чертежу.



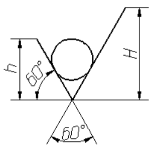
Например, $\sqrt{Ra3,2}$, $\sqrt{Rz40}$



Вид обработки не указан



Шероховатость поверхности определяется снятием слоя материала (шлифование, полирование и другое)



Шероховатость поверхности образуется без снятия слоя материала (чеканка, накатывание роликами и др.) и необработанных поверхностей.

Если преобладающее число поверхностей не обрабатывается, шероховатость показывают в правом верхнем углу $\sqrt{Ra6,3\left(\sqrt{\quad}\right)}$.