

Графическое решение уравнений с модулями

Уравнение типа $|x - a| + |x - b| = c$

На координатной оси показываем критические точки – точки, при которых модуль равен нулю

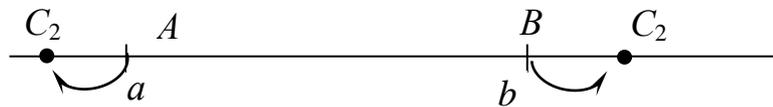
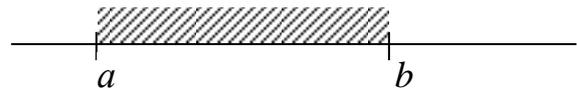


Проверяем условие $|b - a|$

Если $|b - a| > c$, то $x = \emptyset$

$|b - a| = c$, то $x \in [a, b]$

$|b - a| < c$, то



$$2BC_2 + AB = c$$

$$BC_2 = \frac{c - AB}{2}$$

$$x_1 = b + BC_2$$

$$x_2 = a - AC_2 \quad (BC_2 = AC_2)$$

Пример 1

$$|x - 4| + |x - 7| = 2$$

$$|7 - 4| = 3 > 2$$

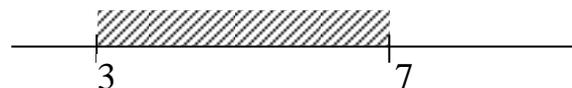
$$x = \emptyset$$

Пример 2

$$|x - 3| + |x - 7| = 4$$

$$|7 - 3| = 4$$

$$x \in [3; 7]$$



Пример 3

$$|x - 3| + |x - 7| = 9$$

$$|7 - 3| = 4 < 9$$

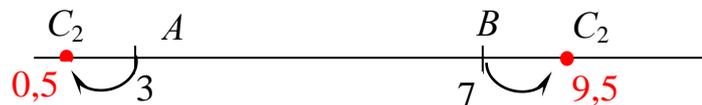
$$2BC_2 + AB = 9$$

$$2BC_2 + 4 = 9$$

$$BC_2 = \frac{9 - 4}{2} = 2,5$$

$$x_1 = 7 + 2,5 = 9,5$$

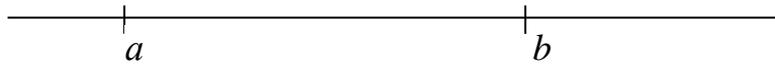
$$x_2 = 3 - 2,5 = 0,5$$



Проверка: $|9,5 - 3| + |9,5 - 7| = 6,5 + 2,5 = 9$
 $|0,5 - 3| + |0,5 - 7| = 2,5 + 6,5 = 9$

Уравнение типа $|x-a| - |x-b| = c$

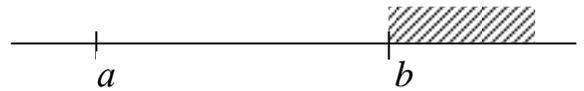
На координатной оси показываем критические точки – точки, при которых модуль равен нулю



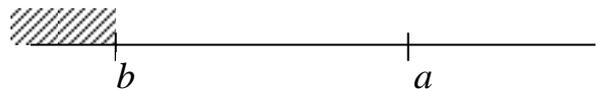
Проверяем условие $|a-b|$

Если $|a-b| < c$, то $x = \emptyset$

Если $|a-b| = c$ и $b > a$, то $x \geq b$



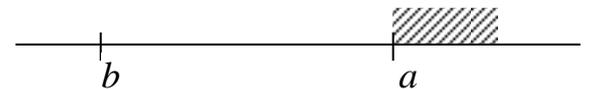
Если $|a-b| = -c$ и $b < a$, то $x \leq b$



Если $|a-b| = -c$ и $b > a$, то $x \leq a$



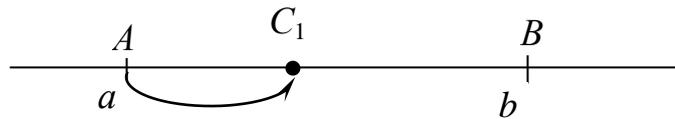
Если $|a-b| > c$ и $b < a$, то $x \geq a$



$$2AC_1 - AB = c$$

$$AC_1 = \frac{c + AB}{2}$$

$$x_1 = a + AC_1$$



Пример 1

$$|x-4| - |x-7| = 9 \quad a=4, b=7$$

$$|4-7| = 3 < 9$$

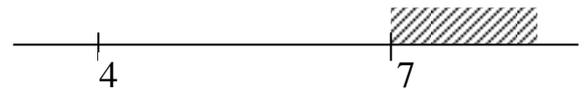
$$x = \emptyset$$

Пример 2

$$|x-4| - |x-7| = 3 \quad a=4, b=7, b > a$$

$$|4-7| = 3$$

$$x = [7; \infty, \text{ например, } x=10, \text{ тогда } |10-4| - |10-7| = 6-3=3$$

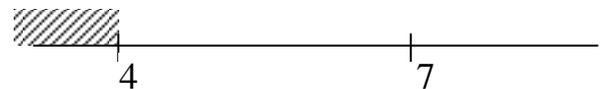


Пример 3

$$|x-4| - |x-7| = -3 \quad a=4, b=7, b > a$$

$$|4-7| = 3$$

$$x =]-\infty; 4], \text{ например, } x=0, \text{ тогда } |0-4| - |0-7| = 4-7=-3$$

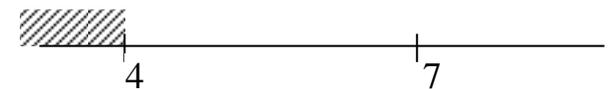


Пример 4

$$|x-7| - |x-4| = 3 \quad a=7, b=4, b < a$$

$$|7-4| = 3$$

$$x =]-\infty; 4], \text{ например, } x=0, \text{ тогда } |0-7| - |0-4| = 7-4=3$$

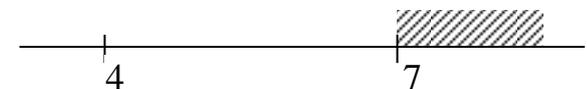


Пример 5

$$|x-7| - |x-4| = -3 \quad a=7, b=4, b < a$$

$$|7-4| = 3$$

$$x = [7; \infty, \text{ например, } x=10, \text{ тогда } |10-7| - |10-4| = 3-6=-3$$



Пример 6

$$|x-4|-|x-7|=2 \quad a=4, b=7$$

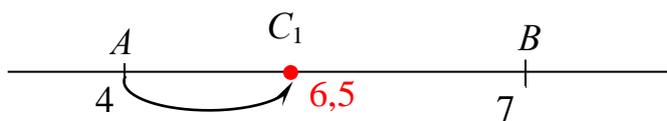
$$|4-7|=3 > 2$$

$$2AC_1 - 3 = 2$$

$$AC_1 = \frac{2+3}{2} = 2,5$$

$$x_1 = 4 + 2,5 = 6,5$$

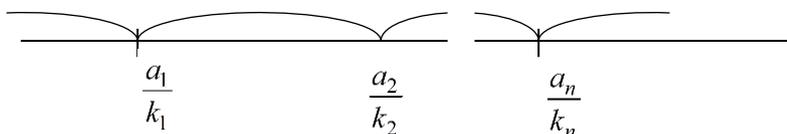
$$\text{Проверка: } |6,5-4| + |6,5-7| = 2,5 - 0,5 = 2$$



Уравнение типа $|k_1x - a_1| \pm |k_2x - a_2| \pm \dots \pm |k_nx - a_n| = c$

1 На координатной оси показываем критические точки – точки, при которых модуль равен нулю

2 Разбить на промежутки, ограниченные критическими точками



3 Подставляя любое значение на каждом промежутке определяем знак выражения в модуле

4 В зависимости от полученных знаков открываем модули

5 Решаем уравнения (количество уравнений равно числу промежутков)

6 Проверяем принадлежит ли корень данному промежутку (если не принадлежит – это пустой корень)

Пример 1

$$|x+2|-|x-3|=5$$

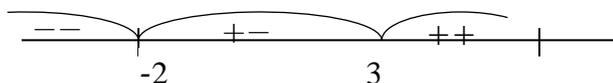
1 Критические точки

$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$$x-3=0 \rightarrow x=3$$

2 Разбиваем на промежутки

3 Проверяем знаки на промежутках



4 В зависимости от знаков открываем модули

$$-x-2+x-3=5$$

$$x+2+x-3=5$$

$$x+2-x+3=5$$

5 Решаем уравнения

$$-x-2+x-3=5$$

$$-5=5$$

$$x=\emptyset$$

$$x+2+x-3=5$$

$$2x-1=5$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

$$x+2-x+3=5$$

$$5=5$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Ответ: $[3; \infty[$