Методы решения систем двух уравнений

Метод выражения – заключается в том, что выражается одна из неизвестных и подставляется в другое уравнение.

Пример:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 2(1+y) + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 2 + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: 3; 2

Метод сложения – заключается в том, что одно уравнение умножается на определенный сомножитель и складывается с другим уравнением (сомножитель выбирается такой, чтобы при сложении исчезала одна из неизвестных)

Пример: умножаем первое уравнение (−2) и складываем со вторым

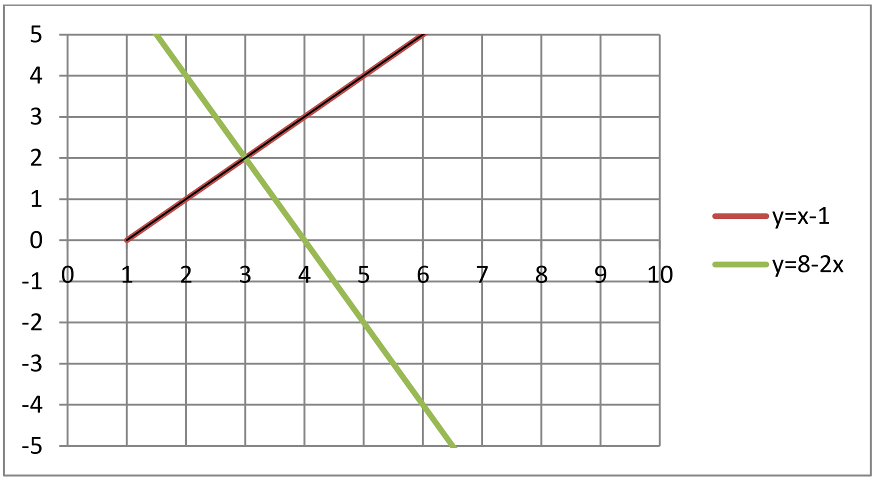
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ \cancel{2x} + y - \cancel{2x} + 2y = 8 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: 3; 2

Графический метод – заключается в том, что оба уравнения выражаем в виде $y = f(x)$, строим графики функций. Точка пересечения – искомое решение.

Пример:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ y = 8 - 2x \end{cases}$$



Ответ: 3; 2

Метод Крамера – заключается в том, что составляется матрица

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} *$$

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Определитель $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$

Определитель $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$.

Если $\Delta \neq 0$, корни уравнений находятся по формулам Крамера:

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Если $\Delta = 0$ и хотя бы один Δ_x и Δ_y не равен нулю, система не имеет решений.

Пример:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 8 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 1 = 8 - 2 = 6$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ответ: 3; 2

Примечание: Выбор метода решения системы уравнений зависит от вида системы, и рекомендуется выбирать самый удобный. При этом нужно учесть, что графический метод не всегда может дать точное значение корней. Метод Крамера целесообразно применять, когда система имеет вид *. Иногда при решении системы уравнений целесообразно произвести замену для приведения системы к более удобному виду, например:

$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{2}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \end{cases}$ Заменяем $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}$, тогда

$\begin{cases} a+b=\dfrac{7}{12} \\ 2b-a=\dfrac{1}{6} \end{cases}$. Это уравнение можно решать любым удобным способом, например методом Крамера:

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{7}{12} \\ -a+2b=\dfrac{1}{6} \end{cases}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2+1=3,\ \Delta_a=\begin{vmatrix} \dfrac{7}{12} & 1 \\ \dfrac{1}{6} & 2 \end{vmatrix}=\frac{7}{6}-\frac{1}{6}=1,\ \Delta_b=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{7}{12} \\ -1 & \dfrac{1}{6} \end{vmatrix}=\frac{1}{6}+\frac{7}{12}=\frac{3}{4}$$

$a=\dfrac{\Delta_a}{\Delta}$, $a=\dfrac{1}{3}$,

$b=\dfrac{\Delta_b}{\Delta}$, $b=\dfrac{3}{4\cdot 3}=\dfrac{1}{4}$.

Тогда $x=\dfrac{1}{a}=3$, $y=\dfrac{1}{b}=4$